

参考答案及解析

文科数学(一)

一、选择题

1. C 【解析】由已知得 $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, 全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 故 $\complement_I(M \cup N) = \{0, 5, 7, 9\}$.
2. B 【解析】因为 $z = \frac{a+2i}{1+i} = \frac{(a+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a+2}{2} + \frac{2-a}{2}i$, 所以 $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-a}{2}\right)^2 = 10$, 解得 $a = \pm 4$. 代入检验知, $a = -4$ 符合题意.
3. A 【解析】由题意得 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$ (当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立), 可知 $f'(x)$ 为增函数. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 故排除选项 BD; 又 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故排除选项 C.
4. C 【解析】对于 A, 平均数为 $(15 \times 0.01 + 45 \times 0.02 + 65 \times 0.02 + 75 \times 0.03 + 85 \times 0.01 + 95 \times 0.01) \div 0.1 = 70.5$, 所以 A 正确; 对于 B, 因为 $[40, 50), [50, 60), [60, 70)$ 三组数据的频率为 $(0.01 + 0.015 + 0.02) \times 10 = 0.45$, 所以 B 正确; 对于 C, 全区学生调查问卷成绩在 $[60, 70)$ 的学生人数为 $12\,000 \times 0.02 \times 10 = 2\,400$, 所以 C 不正确; 对于 D, $[80, 90), [90, 100]$ 两组数据的频率为 $(0.01 + 0.015) \times 10 = 0.25$, 所以 D 正确.
5. B 【解析】因为 $S_{1\,023} - S_{1\,000} = a_{1\,001} + a_{1\,002} + \cdots + a_{1\,023} = 23a_{1\,012} = 1$, 所以 $a_{1\,012} = \frac{1}{23}$, 故 $S_{2\,023} = \frac{a_1 + a_{2\,023}}{2} \times 2\,023 = a_{1\,012} \times 2\,023 = \frac{2\,023}{23}$.
6. C 【解析】从 A, B, C, D, E 共 5 个自然村中任选 3 个的情况有 (A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (B, C, D), (B, C, E), (C, D, E), (A, C, D), (A, C, E), (A, D, E), (B, D, E), 共 10 种, 其中 A, B 两个自然村恰有 1 个被选中的情况有 (B, C, D), (B, C, E), (A, C, D), (A, C, E), (A, D, E), (B, D, E), 共 6 种, 所以 A, B 两个自然村恰有 1 个被选中的概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
7. D 【解析】如图, 设底面中心为 O, 上棱中点为 A, 外接球的球心为 B, 半径为 R, 因为台体的底边长为 4, 底面宽为 2, 所以底面外接圆的半径 $r = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. 因为上棱长为 2, 高为 4, 所以 $OB^2 + (\sqrt{5})^2 = (4 - OB)^2 + 1^2$, 解得 $OB = \frac{3}{2}$, 所以 $R^2 = (\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{34}{4}$.
8. C 【解析】该程序的运行过程为 $a=1, b=1, b < 40$, 判断框条件不成立, 开始执行循环体, $a=1+1=2, b=2 \times 2 - 3 = 1 < 40$, 继续循环; $a=2+1=3, b=2 \times 3 - 3 = 3 < 40$, 继续循环; $a=3+3=6, b=12-3=9 < 40$, 继续循环; $a=9+6=15, b=2 \times 15 - 3 = 27 < 40$, 继续循环; $a=15+27=42, b=2 \times 42 - 3 = 81 > 40$, 跳出循环, 输出 $b=81$.
9. A 【解析】设向量 a 与向量 $a+2b$ 的夹角为 θ , 因为 $(a+2b)^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = 4+4a \cdot b+4=12$, 所以 $a \cdot b = 1$. 因为 $a \cdot (a+2b) = a^2 + 2a \cdot b = 4+2=6$, 所以 $\cos \theta = \frac{a \cdot (a+2b)}{|a| \cdot |a+2b|} = \frac{6}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以向量 a 与向量 $a+2b$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.
10. D 【解析】由 $\sin \alpha = \sqrt{5} \sin \beta, \sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$ 得 $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 5 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta$, 所以 $1 + \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta + 1$, 即 $\cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta$. 又 α, β 均为锐角, 所以 $\cos \alpha = 2 \sin \beta$. 又 $\sin \alpha = \sqrt{5} \sin \beta$, 所以 $\cos \alpha = 2 \times \frac{\sin \alpha}{\sqrt{5}}$, 解得 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 又 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$, 所以 $2\sqrt{2} \sin \beta = \cos \beta$, 解得 $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以 $\tan^2 \alpha = \tan^2 \beta = \frac{5-2\sqrt{2}}{4}$.
11. C 【解析】连接 AM. 由渐近线的定义, 得 $M(a, b)$. 由 $\angle FNA = 90^\circ$, 得 $|ON|^2 = |OF| \cdot |OA|$, 即 $|ON| = \sqrt{ac}$. 因为 $ON \parallel AM$, 所以 $\frac{|ON|}{|AM|} = \frac{|OF|}{|AF|}$, 即 $\frac{\sqrt{ac}}{b} = \frac{c}{c+a}$, 化简得 $c^2 - 2ac - a^2 = 0$, 两边同除以 a^2 , 得 $e^2 - 2e - 1 = 0$, 解得 $e = 1 + \sqrt{2}$ (舍去).
12. D 【解析】由 $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 为偶函数, 知 $f(x)$ 的图象

关于直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称, 则 $-\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = m\pi + \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$

①; 由 $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数, 知 $f(x)$ 的图象关于

点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 则 $\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ②, 所以由

①②, 得 $\varphi = \frac{m+n}{2}\pi + \frac{\pi}{4}, m, n \in \mathbb{Z}$. 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以

$\varphi = \frac{\pi}{4}$. 将 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 代入②, 得 $\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{4} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, 则 $\omega =$

$\frac{3}{4}(4n-1), n \in \mathbb{Z}$. 因为 $\omega > 0$, 所以 $4n-1 > 0, n \in \mathbb{N}^+$,

解得 $n \geq 1, n \in \mathbb{N}^+$. 当 $n=1$ 时, $\omega = \frac{9}{4}$.

二、填空题

13. -3 【解析】由条件可知, $f'(x) = 2x + 2f'(1) + \frac{1}{x}$,

则 $f'(1) = 2 + 2f'(1) + 1$, 解得 $f'(1) = -3$.

14. $\frac{21\pi}{20}$ 【解析】 $\tan \theta = \frac{\cos \frac{6\pi}{5} - \sin \frac{6\pi}{5}}{\cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5}} = \frac{1 - \tan \frac{6\pi}{5}}{1 + \tan \frac{6\pi}{5}} =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, 则 $\theta = k\pi - \frac{19\pi}{20}, k \in \mathbb{Z}$.

因为 $\cos \frac{6\pi}{5} < 0, \sin \frac{6\pi}{5} > 0$, 所以 θ 的终边在第三象限, 又 $\theta \in (-\pi, -\frac{3\pi}{2})$, 所以取 $k = -2$, 得

$\theta = \frac{21\pi}{20}$.

15. 0 【解析】根据题意, $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 $f(1) = 0$. 又因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1) = f(x-1)$, 则 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 所以 $f(2023) = f(4 \times 506 - 1) = f(-1) = f(1) = 0$.

16. 1 【解析】设 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{2p}\right), B\left(x_2, \frac{x_2^2}{2p}\right)$, 显然, 直线 AB

的斜率存在, 且 $k = \frac{\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2p}$, 则直线 AB 的

方程为 $y = \frac{x_1 + x_2}{2p}x + 2$. 联立 $\begin{cases} y = \frac{x_1 + x_2}{2p}x + 2, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 整理

得 $x^2 - (x_1 + x_2)x - 4p = 0$, 则 $x_1x_2 = -4p$. 由 $x^2 = 2py$, 得 $y = \frac{x^2}{2p}$, 求得 $y' = \frac{x}{p}$, 故切线 AM 的方程为

$y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{p}x - \frac{x_1^2}{2p}$ ①, 同理可得

切线 BM 的方程为 $y = \frac{x_2}{p}x - \frac{x_2^2}{2p}$ ②, 两式相减, 得

M 的横坐标 $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 两式相加, 得 M 的纵坐标

$b = \frac{x_1 + x_2}{2p}x - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4p} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} =$

$\frac{2x_1x_2}{4p} = \frac{-8p}{4p} = -2$. 由 $a + b = -1$, 得 $a = 1$, 所以

$M(1, -2)$. $l_{AB}: y = \frac{1}{p}x + 2$, 即 $x - py + 2p = 0$, 所以

点 M 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1 + 4p|}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, 所以

$7p^2 + 16p - 23 = 0$, 解得 $p = 1$ 或 $p = -\frac{23}{7}$ (舍去).

三、解答题

17. 解: (1) 由题意知 $AB = c = 2b, AD = \frac{\sqrt{17}}{6}c = \frac{\sqrt{17}}{3}b$,

$BD = \frac{a}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4b^2 + a^2 - b^2}{2 \times 2b \times a} = \frac{a^2 + 3b^2}{4ab}$; (3 分)

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos B =$

$\frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{4b^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{17}{9}b^2}{2 \times 2b \times \frac{a}{3}} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab}$.

则 $\frac{a^2 + 3b^2}{4ab} = \frac{a^2 + 19b^2}{12ab}$, 整理得 $a^2 = 5b^2$,

所以 $b^2 = \frac{a^2}{5}$, 故 $\angle BAC = 90^\circ$. (6 分)

由 $a^2 = 5b^2$ 及 $c = 2b$, 得 $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle AEC$ 中, $CE = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 由余弦定理, 得 $AE^2 = AC^2 +$

$CE^2 - 2AC \cdot CE \cos C = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times$

$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{9}$, 则 $AE = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; (9 分)

由正弦定理, 得 $\frac{AC}{\sin \angle AEC} = \frac{AE}{\sin C}$,

则 $\sin \angle AEC = \frac{AC}{AE} \cdot \sin C = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

故 $\triangle ADE$ 的外接圆的直径为 $2R = \frac{AD}{\sin \angle AED} =$

$\frac{\frac{\sqrt{17}}{6}c}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{6} \times 2}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{\sqrt{170}}{9}$. (12 分)

18. 解: (1) $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$,

$\bar{y} = \frac{10+12+15+16+17}{5} = 14$. (2 分)

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 18$,

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 24$. (5 分)

$$\text{所以相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{18}{\sqrt{10} \times \sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{85}} \approx 0.98. \quad (7 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 因为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{18}{10} = 1.8, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 14 - 1.8 \times 4 = 6.8, \\ \text{所以 } y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 1.8x + 6.8. \quad (10 \text{ 分})$$

$$(3) \text{ 当 } x = 7 \text{ 时, } \hat{y} = 1.8 \times 7 + 6.8 = 19.4, \\ \text{所以估计第七天的客流量为 } 19.4 \text{ 万}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. (1) 证明: 由题意可知, PE, PF, PD 三条侧棱两两互相垂直, (1 分)

因为 $PD \perp PE, PD \perp PF, PE \cap PF = P, PE, PF \subset \text{平面 } PEF$,

所以 $PD \perp \text{平面 } PEF$. (3 分)

因为 $MF \subset \text{平面 } PEF$, 所以 $PD \perp MF$. (4 分)

(2) 解: 因为正方形的边长为 3,

所以 $PE = PF = PD = 3$.

$$V_{\text{三棱锥 } P-DEF} = V_{\text{三棱锥 } D-PEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle PEF} \times PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times 6 = 9. \quad (7 \text{ 分})$$

又三棱锥 $M-EFD$ 的体积为 3,

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥 } D-PMF} = V_{\text{三棱锥 } D-PEF} - V_{\text{三棱锥 } M-EFD} = 9 - 3 = 6. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{设 } PM = x, \text{ 则 } V_{\text{三棱锥 } D-PMF} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle PMF} \times PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PM \times PF \times PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times x \times 3 \times 6 = 6,$$

$$\text{解得 } x = 2, \quad (11 \text{ 分})$$

在 $\text{Rt} \triangle PMF$ 中,

$$MF = \sqrt{PM^2 + PF^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. (1) 解: 由题意得 $f'(x) = e^x - x^2 - a$, (1 分)

令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = e^x - 2x$,

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^x - 2$,

当 $h'(x) > 0$, 即 $e^x - 2 > 0$ 时, 解得 $x > \ln 2$;

当 $h'(x) < 0$, 即 $e^x - 2 < 0$ 时, 解得 $x < \ln 2$.

所以函数 $g'(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, (3 分)

则 $g'(x) \geq g'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$,

所以函数 $f'(x)$ 是增函数. (4 分)

(2) 证明: 由题知即证 $e^x - t \ln x > \frac{1}{3}x^3 - x + 1$, 只需

$$\text{证 } e^x - \frac{1}{3}x^3 - x - 1 > t \ln x - 2x, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 - x - 1,$$

由(1)知 $f'(x) = e^x - x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f'(x) > f'(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$,

即函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) > f(0) = 0$, (6 分)

欲证 $e^x - \frac{1}{3}x^3 - x - 1 > t \ln x - 2x$ 恒成立,

只需证明 $t \ln x - 2x \leq 0$ 恒成立, (7 分)

令 $\varphi(x) = t \ln x - 2x, x \in (0, +\infty)$,

当 $t = 0$ 时, $t \ln x - 2x \leq 0$ 恒成立; (8 分)

当 $0 < t \leq 2e$ 时, $\varphi'(x) = \frac{t}{x} - 2$, 令 $\varphi'(x) > 0$,

解得 $0 < x < \frac{t}{2}$; 令 $\varphi'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{t}{2}$,

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, \frac{t}{2})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{t}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } \varphi(x)_{\max} = \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = t \ln \frac{t}{2} - t = t \left(\ln \frac{t}{2} - 1\right) \leq 0. \quad (11 \text{ 分})$$

综上, 当 $t \in [0, 2e]$ 时, $f(x) + (a+1)x > t \ln x$. (12 分)

21. 解: (1) 由题意设圆 M 的半径为 r , 则 $|MO_1| = r + \frac{1}{2}$,

$$|MO_2| = \frac{7}{2} - r, \text{ 所以 } |MO_1| + |MO_2| = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4.$$

故圆心 M 的轨迹是以 $O_1(-1, 0), O_2(1, 0)$ 为焦点, 4 为长轴长的椭圆,

所以 $c = 1, a = 2$, 则 $b^2 = 3$,

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$, 直线 AB 的

方程为 $y = kx + t$, 将 $y = kx + t$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 整理

$$\text{得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = (8kt)^2 - 4(3 + 4k^2)(4t^2 - 12) > 0,$$

$$\text{即 } 4k^2 - t^2 + 3 > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4t^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{\sqrt{64k^2 t^2 - 4(3 + 4k^2)(4t^2 - 12)}}{3 + 4k^2}$$

$$= \frac{\sqrt{48(3 + 4k^2 - t^2)}}{3 + 4k^2}.$$

$$\text{故 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{1 + k^2} \times \sqrt{48(3 + 4k^2 - t^2)}}{3 + 4k^2}.$$

高考押题卷

· 全国卷 ·

又原点 O 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2} |AB| \times d \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3+4k^2-t^2}}{3+4k^2} \times \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{(3+4k^2-t^2)t^2}}{3+4k^2} \quad (6 \text{ 分}) \\ &\leq \frac{2\sqrt{3} \times \frac{3+4k^2-t^2+t^2}{2}}{3+4k^2} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $3+4k^2-t^2=t^2$, 即 $3+4k^2=2t^2$ (*) 时, 等号成立.

由 $\vec{OQ} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$, 得 $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = t \\ \lambda y_1 + \mu y_2 = t \end{cases}$.

代入 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, 整理得 $\lambda^2 \left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} \right) + 2\lambda\mu \left(\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} \right) + \mu^2 \left(\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} \right) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{即 } \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \left(\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} \right) &= 1 \quad (**), \quad (8 \text{ 分}) \\ \text{而 } \frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} &= \frac{x_1x_2}{4} + \frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{3} \\ &= \frac{(3+4k^2)x_1x_2 + 4kt(x_1+x_2) + 4t^2}{12} \\ &= \frac{(3+4k^2) \times \frac{4t^2-12}{3+4k^2} + 4kt \times \left(-\frac{8kt}{3+4k^2} \right) + 4t^2}{12} \\ &= \frac{2t^2 - (3+4k^2)}{3+4k^2}, \end{aligned}$$

由(*)可知 $\frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{3} = 0$, 代入(**)式得 $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, 故 $\lambda^2 + \mu^2$ 的值为 1. (12 分)

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x=3+2\cos\alpha, \\ y=1+2\sin\alpha \end{cases}$ 得 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$,

所以 C 的普通方程为 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$. (2 分)

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $3\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 3 = 0$ 中,

得 $3x - 4y + 3 = 0$,

所以 l 的直角坐标方程为 $3x - 4y + 3 = 0$. (4 分)

(2) 由题知圆 C 的圆心 $(3, 1)$, 半径 $R = 2$.

设点 P 到直线 l 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 0 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}. \quad (6 \text{ 分})$$

设圆心 C 到直线 l 的距离为 h ,

$$\text{则 } h = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{8}{5}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{则 } |AB| = 2\sqrt{R^2 - h^2} = 2\sqrt{4 - \frac{64}{25}} = \frac{12}{5}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{54}{25}. \quad (10 \text{ 分})$$

23. (1) 解: 因为 $|x-m| + |x-2| = |x-m-x+2| = |m-2|$, 当且仅当 $x=m$ 或 $x=2$ 时, 等号成立.

(2 分)

由题得 $|m-2| \geq 3$, 解得 $m \leq -1$ 或 $m \geq 5$. (4 分)

因为 $m > 0$, 所以 $m \geq 5$, 所以 $M = 5$. (5 分)

(2) 证明: 由(1)知 $2a + b + c = 5$, 所以 $(a+b) + (a+c) = 5$. (6 分)

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} &= \frac{1}{5} [(a+b) + (a+c)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(2 + \frac{a+c}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} \right) \geq \frac{1}{5} \left(2 + 2\sqrt{\frac{a+c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a+c}} \right) = \frac{4}{5}, \end{aligned} \quad (9 \text{ 分})$$

当且仅当 $\frac{a+c}{a+b} = \frac{a+b}{a+c}$, 即 $b=c$ 时, 等号成立.

$$\text{故 } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{4}{5}. \quad (10 \text{ 分})$$



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

