高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $M=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<4\}$，所以 $M\cup N=\{x|-3<x<4\}$. 故选 A.

2. B　$z=\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$，所以 $\bar{z}=1+i$. 故选 B.

3. C　甲射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，极差为 $9-4=5$，平均成绩为 $\overline{x_甲}=\frac{7+8+9+5+4+9}{6}=7$，方差为 $s_甲^2=\frac{1}{6}\times[(7-7)^2+(8-7)^2+(9-7)^2+(5-7)^2+(4-7)^2+(9-7)^2]=\frac{11}{3}$；当 $a=9$ 时，乙射击成绩的中位数为 $\frac{7+8}{2}=7.5$，A 错误；当 $a=8$ 时，乙射击成绩的极差为 $8-7=1$，B 错误；当 $a=7$ 时，乙平均成绩为 $\overline{x_乙}=\frac{7+8+7+8+7+7}{6}=\frac{22}{3}$，方差为 $s_乙^2=\frac{1}{6}\left[4\times\left(7-\frac{22}{3}\right)^2+2\times\left(8-\frac{22}{3}\right)^2\right]=\frac{2}{9}$，故 $\overline{x_甲}<\overline{x_乙}$，$s_甲^2>s_乙^2$，由此可知乙比甲的平均成绩高，乙比甲的成绩稳定，C 正确，D 错误. 故选 C.

4. B　因为 $f(x)=(x^2+x)e^x$ 定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=(x^2+3x+1)e^x$，所以当 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $x<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 时 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，又 $f(0)=0$，故符合条件的函数图象为 B.

5. B　因为 $x\in[0,\pi]$，$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$，故所求概率 $P=\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

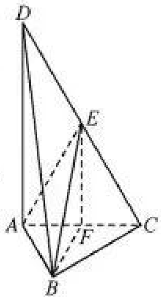
6. D　由题意，得 $\begin{cases}a_2a_9=a_4a_7=128,\\a_4+a_7=36,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_4=4,\\a_7=32,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=32,\\a_7=4\end{cases}$（因为 $\{a_n\}$ 递增，故舍去），所以 $\{a_n\}$ 的公比 $q=\sqrt[3]{\frac{a_7}{a_4}}=2$. 故选 D.

7. C　因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(1+x)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x+1)=-[-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，所以 $f\left(\frac{2023}{3}\right)=f\left(2\times337+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{5}{3}\right)=-f\left(\frac{5}{3}\right)=-2$. 故选 C.

8. B　因为 $f(-x)=\sin|-x|-\cos(-2x)=\sin|x|-\cos 2x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，则 A 正确；若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，即 $\sin|x+\pi|-\cos 2(x+\pi)=\sin|x|-\cos 2x$，亦即 $\sin|x+\pi|=\sin|x|$ 恒成立. 令 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}$，显然不成立，所以“$f(x)$ 的最小正周期为 π”是错误的，则 B 错误；由 $f(x)$ 是偶函数，只需考虑 $x\geqslant0$ 时的最值即可. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\sin x-\cos 2x=2\sin^2x+\sin x-1=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以 $2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\in\left[-\frac{9}{8},2\right]$，即 $f(x)$ 值域为 $\left[-\frac{9}{8},2\right]$，则 C 和 D 正确. 故选 B.

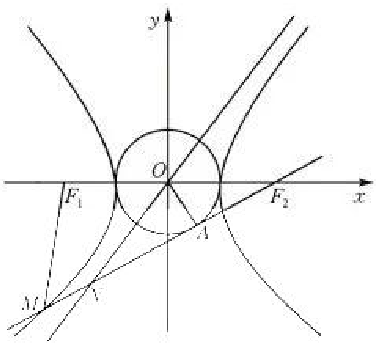
9. C　由题意，可知 $a_{n+1}-a_n=n+1$，$a_1=1$，所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=n+(n-1)+\cdots+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，则 $b_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_{2023}=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{2023}{1012}$. 故选 C.

10. C　如图，取 AC 的中点 F，连结 BF，EF，因为 $\triangle ACE$ 为等边三角形，E 是 CD 中点，所以 $AE=CE=ED$，所以 $AC\perp AD$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，由勾股定理，得 $AC^2+AD^2=(2AC)^2$，因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $AC=2$. 因为 $AD\perp AC$，$AD\perp AB$，所以 $AD\perp$ 平面 ABC，所以 $AD\perp BC$. 又 $BC\perp BD$，所以 $BC\perp$ 平面 ABD，所以 $BC\perp BA$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$BC=\sqrt{2}$，所以 $AB=BC=\sqrt{2}$. 所以 $BF\perp AC$. 又 $\triangle ACE$ 为等边三角形，所以 $EF\perp AC$，因为 $BF\cap EF=F$，所以 $AC\perp$ 平面 BEF，所以 $AC\perp BE$，则直线 AC 与 BE 所成角为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 C.来源：高三答案公众号

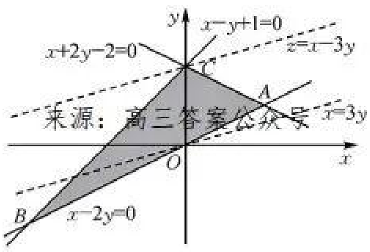


11. A　由 $f(x_1)=g(x_2)$，得 $e^{x_1}-2x_1=-x_2$，化简整理得 $x_1-x_2=e^{x_1}-x_1$，因为 $g(x)$ 的值域，$f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，所以 x_1 的取值范围也是 $\mathbf{R}$，令 $h(x)=e^x-x(x\in\mathbf{R})$，$h'(x)=e^x-1$，令 $e^x-1=0$，解得 $x=0$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，故 $(x_1-x_2)_{\min}=1$. 故选 A.

12. D　设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由题意可知 $OA\perp AF_2$，$|OA|=a$，所以 $|AF_2|=\sqrt{|OF_2|^2-|OA|^2}=b$，从而直线 AF_2 的斜率为 $\tan\angle OF_2A=\frac{a}{b}$，由此，直线 OA 的斜率为 $k=-\frac{b}{a}$，其方程为 $y=-\frac{b}{a}x$，恰好是 C 的一条渐近线，所以直线 OA 与双曲线 C 无交点，A 错误；由双曲线的定义及 $|MF_1|=2b$，$|MF_2|=2b+2a$，又 $|AF_2|=b$，则 $|AM|=2a+b$，B 错误；由 $|AF_2|=b$，得 $|MF_2|=4|AF_2|=4b$，再由双曲线的定义，得 $|MF_1|=4b-2a$；在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $(4b-2a)^2=(4b)^2+(2c)^2-2\times4b\times2c\times\frac{b}{c}$，化简得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，C 错误；由 $|NF_2|=4|AF_2|$ 及 $|AF_2|=b$，得 $|AN|=3b$；设直线 ON 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，又 $\angle AON=\pi-2\alpha$，$\tan\angle AON=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，又 $\tan\angle AON=\frac{3b}{a}$，所以 $-\frac{\frac{2b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{3b}{a}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，D 正确. 故选 D.

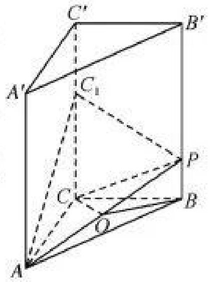


13. -3　作出不等式组 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\x-2y\leqslant0,\\x+2y-2\leqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图中阴影部分(含边界)，其中 $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$B(-2,-1)$，$C(0,1)$，当直线 $z=x-3y$ 过点 C 时，z 取最小值 $z_{\min}=-3$.



14. $-\frac{1}{2}$　由 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=-2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$；两边平方，得 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$，整理，得 $12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5=0$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{6}$(舍)或 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$.

15. $y^2=4x$（也可以是 $x^2=-4y$） 因为抛物线 C 与直线 $y=x+1$ 相切，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$ 或 $x^2=-2qy(q>0)$；由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=x+1, \end{cases}$ 得 $x^2+(2-2p)x+1=0$，所以 $\Delta_1=(2-2p)^2-4=0$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的方程可以为 $y^2=4x$；由 $\begin{cases} x^2=-2qy, \\ y=x+1, \end{cases}$ 得 $x^2+2qx+2q=0$，所以 $\Delta=(2q)^2-4\times 2q=0$，解得 $q=2$，所以抛物线 C 的方程可以为 $x^2=-4y$.来源：高三答案公众号



16. $20\sqrt{15}\pi$ 如图，取 AP 的中点为 O，连接 CO,OB. 因为三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 为直棱柱，故 $CC_1\perp$ 平面 ABC，而 $AC\subset$ 平面 ABC，故 $CC_1\perp AC$，又 $CB\perp AC$，$CC_1\cap BC=C$，故 $AC\perp$ 平面 $BCC'B'$，因为 $C_1P\subset$ 平面 $BCC'B'$，故 $AC\perp C_1P$，因为 $PA\perp PC_1$，$AC\cap PA=A$，故 $PC_1\perp$ 平面 ACP，因为 $CP\subset$ 平面 ACP，故 $PC_1\perp PC$. 设 $PB=x$，$CC_1=h$，在直角三角形 PCB 中，$CP^2=16+x^2$，同理 $C_1P^2=16+(h-x)^2$，所以 $h^2=32+x^2+(h-x)^2$，整理得到 $h-x=\frac{16}{x}$. 又 $S_{\triangle AC_1P}=\frac{1}{2}\sqrt{36+x^2}\times\sqrt{16+(h-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(36+x^2)\left(16+\frac{16^2}{x^2}\right)}=2\sqrt{52+x^2+\frac{36\times 16}{x^2}}\geqslant 2\sqrt{52+2\times 6\times 4}=20$，当且仅当 $x=2\sqrt{6}$ 时等号成立，也就是 $PB=2\sqrt{6}$ 时，$\triangle APC_1$ 的面积取最小值. 因为 $AC\perp$ 平面 $BCC'B'$，$CP\subset$ 平面 $BCC'B'$，故 $AC\perp CP$，故 $OA=OP=OC$，而 $\triangle PAB$ 为直角三角形，故 $OP=OB$，故 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心，故外接球的直径为 $\sqrt{36+24}=2\sqrt{15}$，所以外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{15})^3=20\sqrt{15}\pi$.

17. 解：(1)由条件与正弦定理得 $\sin A-\sin B=2\sin C\cos B$. ………………………… 1分

由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ 得

$\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C=\sin(C-B)$， ………………………… 3分

又 $B\in(0,\pi)$，$C-B\in(-\pi,\pi)$，所以 $B=C-B$，或 $B+C-B=\pi$，

所以 $C=2B$，或 $C=\pi$（舍去）， ………………………… 4分

当 $A=\frac{3\pi}{4}$ 时，$3B=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$，所以 $B=\frac{\pi}{12}$. ………………………… 5分

(2)法一：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

由正弦定理，得 $\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………………… 6分

由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $b^2=4+\frac{9}{4}b^2-2\times 2\times\frac{3}{2}b\times\frac{3}{4}$，

整理得 $\frac{5}{4}b^2-\frac{9}{2}b+4=0$，解得 $b=\frac{8}{5}$ 或 $b=2$. ………………………… 8分

当 $b=2$ 时，$c=\frac{3}{2}b=3$，此时 $a=b=2$，所以 $A=B$，又因为 $C=2B$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 与 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 矛盾，舍去；………… 10分

当 $b=\frac{8}{5}$ 时，$c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，

此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………………………… 12分

法二：由(1)知，$\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B$，………………………… 6分

由正弦定理，得 $\cos B=\frac{c}{2b}=\frac{3}{4}$，………………………… 7分

结合 $a=2$，$2c=3b$，代入 $a+b=2c\cos B$，

解得 $b=\frac{8}{5}$，从而 $c=\frac{3}{2}b=\frac{12}{5}$，………………………… 10分

此时$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{12}{5}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$. ………………………………………… 12 分

18. (1)证明:连接 BC_1,B_1C,因为侧面 BCC_1B_1 为菱形,$\angle BCC_1=60^\circ$,

所以$\triangle BCC_1$ 为等边三角形,

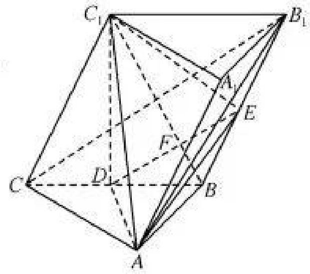
因为点 D 为 BC 的中点,所以 $C_1D\perp BC$, ………………………………………… 1 分

设 $BC=2$,则 $C_1D=\sqrt{3}$,来源:高三答案公众号

因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $AD\perp BC$,则 $AD=\sqrt{3}$,

因为 $AC_1=\sqrt{2}AD=\sqrt{6}$,所以 $AC_1{}^2=AD^2+C_1D^2$,则 $AD\perp C_1D$,

因为 $BC\cap C_1D=D$,所以 $AD\perp$平面 BCC_1B_1; ………………………………………… 4 分



(2)解:由(1)知 $C_1D\perp BC$,$AD\perp C_1D$,$BC\cap AD=D$,

所以 $C_1D\perp$平面 ABC. ………………………………………… 7 分

因为侧面 BCC_1B_1 为菱形,则 $BC_1\perp B_1C$.

因为点 D,E 分别为 BC,BB_1 的中点,所以 $DE/\!/B_1C$,则 $DE\perp BC_1$,

设 $BC=2$,则 $C_1D=\sqrt{3}$,$DE=\frac{1}{2}B_1C=\sqrt{3}$,

设 $BC_1\cap DE=F$,则 $C_1F=\frac{3}{4}C_1B=\frac{3}{2}$. ………………………………………… 9 分

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V_1=S_{\triangle ABC}\cdot C_1D=\frac{1}{2}\times BC\times AD\times C_1D=3$,

三棱锥 C_1-ADE 的体积 $V_2=V_{A-DEC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times DE\times C_1F\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3}{4}$,

故$\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{4}$. ………………………………………… 12 分

19. 解:(1)$\bar{x}=55\times0.01\times10+65\times0.02\times10+75\times0.03\times10+85\times0.03\times10+95\times0.01\times10=76$; ………… 4 分

(2)根据分层抽样,由频率分布直方图知成绩在[50,60)和[60,70)内的人数比例为 $0.01:0.02=1:2$,

所以抽取的 6 人中,成绩在[50,60)内的有 $6\times\frac{1}{3}=2$ 人,记为 A_1,A_2;成绩在[60,70)内的有 $6\times\frac{2}{3}=4$ 人,记为 B_1,B_2,B_3,B_4, ………………………………………… 6 分

从 6 人中任意选取 2 人,有 A_1A_2,A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_1B_4,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,B_1B_2,B_1B_3,B_1B_4,B_2B_3,B_2B_4,B_3B_4,共 15 种可能;

其中选取的 2 人中恰有 1 人成绩在区间[60,70)内的有 A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3,A_1B_4,A_2B_1,A_2B_2,A_2B_3,A_2B_4,共 8 种可能, ………………………………………… 10 分

所以所求概率 $P=\frac{8}{15}$. ………………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为 C 过点 $A(2,\sqrt{2})$,所以$\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$, ………………………………………… 分

设 C 的焦距为 $2c$,由$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$得 $c^2=\frac{1}{2}a^2$,所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{2}a^2$, ………………………… 分

代入上式,解得 $a^2=8$,$b^2=4$, ………………………………………… 分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,易知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+t$,

由$\begin{cases} x=my+t, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1, \end{cases}$得$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-8=0$，

则$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+2)(t^2-8)=-8(t^2-4m^2-8)>0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-8}{m^2+2}$，…………………………………… 5分

由$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}=-1$得，$\cos\alpha=-\cos\beta=\cos(\pi-\beta)$。来源：高三答案公众号

又$\alpha\in[0,\pi)$，$\pi-\beta\in(0,\pi]$，所以$\alpha=\pi-\beta$，则$\alpha+\beta=\pi$，…………………………………… 6分

由题意知直线AM，AN的斜率存在，所以$k_{AM}+k_{AN}=0$。

则$\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-2}+\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-2)+(y_2-\sqrt{2})(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$，…………………………………… 7分

所以$(y_1-\sqrt{2})(my_2+t-2)+(y_2-\sqrt{2})(my_1+t-2)=0$，

则$2my_1y_2+(t-2-\sqrt{2}m)(y_1+y_2)-2\sqrt{2}(t-2)=0$，

即$\dfrac{2m(t^2-8)}{m^2+2}+(t-2-\sqrt{2}m)(-\dfrac{2mt}{m^2+2})-2\sqrt{2}(t-2)=0$。

整理得，$4(m-\sqrt{2})(\sqrt{2}m+t-2)=0$，

又知l不过点$A(2,\sqrt{2})$，则$\sqrt{2}m+t-2\neq0$，

所以$m=\sqrt{2}$，…………………………………… 8分

所以直线l的方程为$x=\sqrt{2}y+t$，则$\Delta=-8(t^2-16)>0$，所以$-4<t<4$，

$y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}t}{2}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-8}{4}$，

则点$A(2,\sqrt{2})$到直线l的距离为$d=\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$，…………………………………… 9分

$|MN|=\sqrt{3[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{3\left[\left(-\dfrac{\sqrt{2}t}{2}\right)^2-4\times\dfrac{t^2-8}{4}\right]}=\sqrt{3(8-\dfrac{1}{2}t^2)}$，

则$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3(8-\dfrac{1}{2}t^2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}t^2(8-\dfrac{1}{2}t^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\dfrac{1}{2}t^2+(8-\dfrac{1}{2}t^2)}{2}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$\dfrac{1}{2}t^2=8-\dfrac{1}{2}t^2$，即$t=\pm2\sqrt{2}$时取等号，…………………………………… 11分

故$\triangle AMN$面积的最大值为$2\sqrt{2}$。…………………………………… 12分

21. 解：(1)$a=1$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+x-1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1$，

所以$f(1)=1$，$f'(1)=1$，

所以函数$f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=x-1$，即$x-y=0$；…………………………………… 4分

(2)由题意，得$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+a(x-1)$，只考虑$x\in(0,2)$，$f'(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{x^2}$。

①当$a=0$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，则$f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，

所以$f'(1)=0$，且当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,2)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,2)$上单调递增，

所以$f(x)$仅在$x=1$处取得极小值，且极小值为$f(1)=1$，不符合题意；…………………………………… 6分

②当 $a<0$ 时,令 $h(x)=ax^2+x-1$,则 $\Delta=1+4a$.

(ⅰ)若 $\Delta=1+4a\leqslant 0$,即 $a\leqslant-\frac{1}{4}$,则 $\forall x\in(0,2)$,$h(x)\leqslant 0$,所以 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,此时 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上无极值,不符合题意. …………………………………………………………………………………… 7分

(ⅱ)若 $\Delta=1+4a>0$,即 $-\frac{1}{4}<a<0$,则 $h(x)$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{1}{2a}>2$,所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增. …… 8分

因为 $h(1)=a<0$,$h(2)=4a+1>0$,由函数单调性和零点存在性定理得,在 $(1,2)$ 上存在唯一的实数 x_1,使得 $h(x_1)=0$,从而 $f'(x_1)=0$,来源：高三答案公众号

且当 $x\in(0,x_1)$ 时,$h(x)<0$,从而 $f'(x)<0$;当 $x\in(x_1,2)$ 时,$h(x)>0$,从而 $f'(x)>0$. ……………………… 10分

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减,在 $(x_1,2)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 仅在 $x=x_1$ 处取得极小值,极小值为 $f(x_1)$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减,且 $1<x_1<2$,所以 $f(x_1)<f(1)=1$,符合题意.

综上,实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$. …………………………………………………………………… 12分

22. 解:(1)由 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$,消去参数 t,得 $x-y+2=0$.

将 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$,得 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$;

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,直线 l 的普通方程为 $x-y+2=0$. ……………………… 5分

(2)依题意,点 $P(-1,1)$ 在 l 上,

将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程并整理,得 $t^2-3\sqrt{2}t+1=0$,首先 $\Delta=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times1=14>0$,

可设 M、N 对应的参数分别是 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=3\sqrt{2}$,$t_1t_2=1$,显然 t_1,t_2 均为正数,

所以 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=3\sqrt{2}$. ……………………………………… 10分

23. 解:(1) $f(x)=\begin{cases}-4(x\geqslant1),\\ -2x-2(-3<x<1),\\ 4(x\leqslant-3),\end{cases}$

当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)\leqslant2$ 化为 $-4\leqslant2$,解得 $x\geqslant1$;

当 $-3<x<1$ 时,$f(x)\leqslant2$ 化为 $-2x-2\leqslant2$,解得 $-2\leqslant x<1$;

当 $x\leqslant-3$ 时,$f(x)\leqslant2$ 化为 $4\leqslant2$,无解;

综上所述,$f(x)\leqslant2$ 的解集为 $\{x|x\geqslant-2\}$; ……………………………………………………………… 5分

(2)由(1)知,$abc=4$,

因为 $(a+b)^2+c^2\geqslant4ab+c^2$(当且仅当 $a=b$ 时,等号成立),

$4ab+c^2=2ab+2ab+c^2\geqslant3\sqrt[3]{(2ab)\times(2ab)\times c^2}=3\sqrt[3]{4(abc)^2}=3\sqrt[3]{4\times4^2}=12$,(当且仅当 $2ab=c^2$,即 $a=b=\sqrt{2}$,$c=2$ 时,等号成立),

所以 $(a+b)^2+c^2$ 的最小值为 12. ……………………………………………………………………… 10分