2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的并集，考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|-1<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x|x<3\}$.

2. B 【解析】本题考查平面向量的垂直与充分、必要条件的判断，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(m+3)^2-5(2m+1)=0$，解得 $m=2$. 所以"$|m|=2$"是"$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$"的必要不充分条件.

3. A 【解析】本题考查简单的线性规划问题，考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略)，当直线 $z=x-y$ 经过点 $(-3,3)$ 时，z 取得最小值，且最小值为 -6.

4. B 【解析】本题考查正切的和差公式与同角的三角函数的关系，考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan\alpha=\tan(\alpha-\beta+\beta)=\dfrac{2+4}{1-2\times4}=-\dfrac{6}{7}$，所以 $\dfrac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{7\tan\alpha-1}{7\tan\alpha+1}=\dfrac{-6-1}{-6+1}=\dfrac{7}{5}$.

5. A 【解析】本题考查导数的几何意义，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

[illegible]

[illegible]

6. C 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性，考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

[illegible]是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 [illegible] 对称，[illegible]的[illegible]

7. B 【解析】本题考查指数与对数的运算，考查数学运算的核心素养.

$$\begin{pmatrix}\lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25\\ \lg 5 & \lg 256\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8^{\frac{2}{3}}\\ 2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\lg 2 & 2\lg 5\\ \lg 5 & \lg 2^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lg 2+\lg 5\\ 4\lg 5+4\lg 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}.$$

8. C 【解析】本题考查平面向量的基本定理与数量积，考查直观想象与数学运算的核心素养.

(方法一)由题意可知，$\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 相似，所以 $\dfrac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC}|}=2$，所以 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\times3^2=10$，所以 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

(方法二)$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{DA}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AD}=-|\overrightarrow{AD}|^2+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=-9+15=6$.

9. C 【解析】本题考查三角函数图象的识别，考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

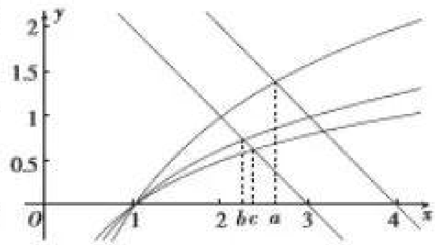
$f(\frac{\pi}{2})=-2\sin\varphi$，$g(\frac{\pi}{2})=2\sin\varphi=-f(\frac{\pi}{2})$，故选 C.

10. D 【解析】本题考查数列的实际应用，考查数学建模的核心素养与应用意识.

设该公司在 2022 年,2023 年,…,2031 年的销售额(单位:万元)分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$. 依题意可得 $a_{n+1}=1.2a_n-2(n=1,2,\cdots,9)$,则 $a_{n+1}-10=1.2(a_n-10)(n=1,2,\cdots,9)$,所以数列$\{a_n-10\}$是首项为 90,公比为 1.2 的等比数列,则 $a_n-10=90\times1.2^{n-1}$,即 $a_n=90\times1.2^{n-1}+10$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10\times10+\frac{90\times(1-1.2^{10})}{1-1.2}\approx100+450\times(6.19-1)=2435.5$,故从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为 2435.5 万元.

11. A 【解析】本题考查基本初等函数与比较大小,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

由 $a+\log_2a=4,b+\log_3b=c+\log_4c=3$,得 $\log_2a=4-a,\log_3b=3-b,\log_4c=3-c$,作出函数 $y=\log_2x,y=4-x,y=3-x,y=\log_3x,y=\log_4x$ 的大致图象,如图所示,由图可知 $a>c>b$.



12. D 【解析】本题考查倍角公式的灵活应用,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

$\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1)$,因为 $\sin\frac{\pi}{5}>0$,所以 $1=$ [illegible]

13. [illegible] 【解析】本题考查命题的逆否命题,考查逻辑推理的核心素养.

[illegible]

14. [illegible] 【解析】本题考查等差、等比数列,考查数学运算的核心素养.

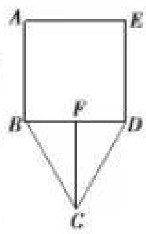
[illegible]

15. [illegible] 【解析】本题考查三角函数图象的变换与对称性,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

依题意可得 $f(x)=\sin[4(x+\frac{\pi}{24})]=\sin(4x+\frac{\pi}{6})$,则 $\begin{cases}4m+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z}),\\ m+\frac{11\pi}{12}=k_2\pi(k_2\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

因为 $-\pi<m<2\pi$,所以 $m=-\frac{11\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}$.

16. $\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 【解析】本题考查导数的实际应用,考查数学建模、直观想象、数学运算的核心素养.



过点 C 作 $CF\perp BD$,垂足为 F. 设 $AB=x(x>0)$,则 $BD=AE=DE=x$,因为 $BC=CD$,所以 $3AB+2BC=12$,则 $BC=6-\frac{3}{2}x$. 由 $BC>0,BC+CD>BD$,得 $0<x<3$. 在 $\triangle BCF$ 中,$CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{(6-\frac{3}{2}x)^2-(\frac{1}{2}x)^2}=$

$\sqrt{2x^2-18x+36}$. 记$\triangle BCD$的面积为S，则$S=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4-9x^3+18x^2}$. 设函数$f(x)=x^4-9x^3+18x^2$，则$f'(x)=4x^3-27x^2+36x=x(4x^2-27x+36)$，令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\frac{27\pm3\sqrt{17}}{8}$. 当$0<x<\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$时，$f'(x)>0$；当$\frac{27-3\sqrt{17}}{8}<x<3$时，$f'(x)<0$. 故当$x=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$时，$f(x)$取得最大值，则$S$取得最大值，此时$AB=\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$.

17. 解：(1)依题意可得$\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \frac{11+q}{60}=\frac{4}{15},\end{cases}$ ………………………… 2分

解得$\begin{cases}p=13,\\ q=5.\end{cases}$ ………………………… 4分

(2)将每个数据都减去28.50后所得新数据的平均数为$\frac{1}{60}[0.01\times13+0.02\times6+0\times4+(-0.02)\times11+(-0.01)\times13+0.04\times1+0.03\times7+(-0.03)\times5]=0$， ………… 6分

所以$\overline{x}=0+28.50=28.50$， ………………………… 7分

[illegible] 28.48，[illegible] 28.52， ………………………… 9分

所以[illegible] ………………………… 11分

因为$\frac{17}{60}$ [illegible] $\frac{48}{60}$ [illegible]合格. ………………………… 12分

18. 解：(1)由正弦定理及$a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$，得$\sin A\sin(A-B)=(\sin C-\sin B)\sin A$.

………………………… 1分

因为$\sin A\neq0$，所以$\sin(A-B)=\sin C-\sin B$. ………………………… 2分

所以$\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$. ………………………… 3分

所以$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

即$2\sin B\cos A=\sin B$， ………………………… 4分

因为$\sin B>0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$. ………………………… 5分

又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6分

(2)$S=\frac{1}{2}AD\cdot[CD\sin\angle ADC+BD\sin(\pi-\angle ADC)]=\frac{a}{2}\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$，

因为$S=3\sqrt{3}$，所以$a=4$. ………………………… 8分

又$S=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以$bc=12$. ………………………… 9分

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则$a^2=(b+c)^2-3bc$， ………………………… 10分

所以$b+c=\sqrt{a^2+3bc}=2\sqrt{13}$. ………………………… 11分

所以$\triangle ABC$的周长为$4+2\sqrt{13}$. ………………………… 12分

19. (1)证明:取 AD 的中点 F,连接 EF,PF,BD. 因为$\triangle PAD$ 是正三角形,所以 $PF\perp AD$. …………………………………………………………………………………………… 1分

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,所以 $PF\perp$平面 $ABCD$. …………………………………………………………………………………………… 2分

因为 $AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PF\perp AC$. …………………………………………… 3分

因为 E 是 AB 的中点,所以 $EF/\!/BD$. 又底面 $ABCD$ 是菱形,所以 $BD\perp AC$,从而 $EF\perp AC$. …………………………………………………………………………………………… 4分

因为 $PF\cap EF=F$,所以 $AC\perp$平面 PEF. …………………………………………… 5分

因为 $PE\subset$平面 PEF,所以 $AC\perp PE$. …………………………………………… 6分

(2)解:连接 BF,因为$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,所以$\triangle ABD$ 是正三角形,所以 $BF\perp AD$. ………… 7分

以 F 为坐标原点,FA,FB,FP 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

令 $AB=2$,则 $C(-2,\sqrt{3},0)$,$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{CE}=$ [illegible],$\overrightarrow{CP}=(2,$ [illegible]$)$. …………………………………… [illegible]分

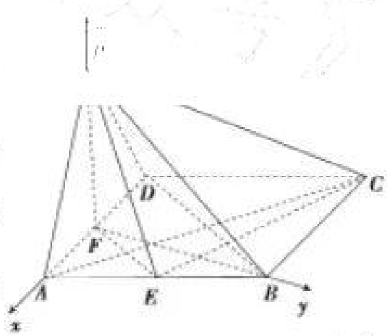
[illegible]

[illegible]

[illegible] …………………………………… [illegible]

$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{37}}=\frac{3\sqrt{37}}{37}$, …………………… 11分

由图可知,二面角 $A-CE-P$ 为锐角,则二面角 $A-CE-P$ 的余弦值为$\frac{3\sqrt{37}}{37}$. ………………………………………… 12分



20. (1)解:设椭圆方程为 $px^2+qy^2=1$, ………………………………………………… 1分

则$\begin{cases}q=1,\\ \frac{64}{25}p+\frac{9}{25}q=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=\frac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$ …………………………………………………… 3分

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 4分

注:若直接设$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得到$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,扣1分.

(2)证明:设 $P(x_0,y_0)$,$A(m,0)$,$B(n,0)$,

直线 PD:$y+\frac{3}{5}=\frac{y_0+\frac{3}{5}}{x_0+\frac{8}{5}}(x+\frac{8}{5})$,令 $y=0$,得 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$. ………………………… 5分

直线 PC:$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$. 令 $y=0$,得 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$. ………………………………………… 6分

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=(n-\frac{x_0}{y_0+1})(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}})=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 8分

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$,

令 $5m+8=-3n,3m=-3n$,得 $n=4,m=-4$, ………………………………………… 10分

则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=-12$.

故存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$,使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值,且定值为 -12. …………………… 12分

21.(1)解: [illegible]

[illegible]

若 $a>1$,则 $x_1+x_2=2a>2,x_1x_2=1>0$,则可设 $0<x_1<1<x_2$,当 $x\in(1,x_2)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,则 $f(x)>f(1)=0$,不符合题意. ………………………………………… 5分

综上所述,a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ……………………………………………………… 6分

(2)证明:当 $a=1$ 时,$\forall x\in[1,+\infty)$,$f(x)\leqslant 0$,即 $\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$,当且仅当 $x=1$ 时取等号, ……………………………………………………………………………………… 7分

令 $x=n(n+1)$,其中 $n\in\mathbf{N}_+$,则 $x>1$,则 $\ln[n(n+1)]<\frac{1}{2}[n(n+1)-\frac{1}{n(n+1)}]$, …… 8分

记 $a_n=\ln(n(n+1)),b_n=n(n+1),c_n=\frac{1}{n(n+1)}$,则 $a_n<\frac{1}{2}(b_n-c_n)$,

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<\frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, ……… 9分

$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}i(i+1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}[(i+2)(i+1)i-(i+1)i(i-1)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, ………… 10分

则可以得到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<\frac{1}{2}[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n}{n+1}]$, ……………………………… 11分

故 $3n+6(n+1)\sum_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<n(n+1)^2(n+2)$. ………………………………… 12 分

22. 解:(1)设点 C 的直角坐标为 (x,y),则 $x=4\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}=-4$,$y=4\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-4$,

所以点 C 的直角坐标为 $(-4,-4)$. ………………………………… 2 分

由 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=11$,得 $x^2+y^2-2x-4y=11$, ………………………………… 4 分

所以圆 M 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$. ………………………………… 5 分

(2)设点 P 的坐标为 $(1+4\cos\alpha,2+4\sin\alpha)$. ………………………………… 7 分

矩形 $PACB$ 的周长为 $2(1+4\cos\alpha+4+2+4\sin\alpha+4)=22+8\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$, ……… 9 分

当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$ 时,矩形 $PACB$ 的周长取得最大值,且最大值为 $22+8\sqrt{2}$. ……… 10 分

23. (1)证明:$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})(a+2b+3c)$, ………………………………… 1 分

因为 a,b,c 均为正数,所以由柯西不等式可得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant\frac{1}{4}\times(1+2+3)^2=9$, …… 3 分

当且仅当 [illegible] 时,等号成立. ………………………………… 4 分

故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 9$. ………………………………… 5 分

(2)[illegible] ………………………………… 6 分

[illegible]

则 $f(c)=|\frac{3}{2}c-2|+|c|=\begin{cases}[illegible], & c\leqslant 0,\\ 2-\frac{1}{2}c, & 0<c<\frac{4}{3},\\ \frac{5}{2}c-2, & c\geqslant\frac{4}{3}.\end{cases}$ ………………………………… 8 分

当 $c\leqslant 0$ 时,$f(c)\geqslant 2$;当 $0<c<\frac{4}{3}$ 时,$\frac{4}{3}<f(c)<2$;当 $c\geqslant\frac{4}{3}$ 时,$f(c)\geqslant\frac{4}{3}$. …………… 9 分

所以 $f(c)_{\min}=\frac{4}{3}$,故 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$. ………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。