广东省新高考普通高中学科综合素养评价高三年级春学期开学调研考试

数学参考答案与解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	A	A	C	C	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	AB	BC	ABC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 4045　　14. $[30,42]$　　15. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　16. 56；$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$

详细解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】D

因为 $A=\{x\mid(6-x)(x+3)\geq 0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{-2,0,1,2\}$，则 $A\cap B=\{-2,0,1,2\}$．故选 D．

2.【答案】C

$\because(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，$\therefore z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}$，$\therefore \overline{z}=-\mathrm{i}$，$\therefore \overline{z}$ 的实部为 0．故选 C．

3.【答案】A

若直线 $3x+(\lambda-1)y=1$ 与直线 $\lambda x+(1-\lambda)y=2$ 平行，

则 $3(1-\lambda)-\lambda(\lambda-1)=0$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-3$，

经检验 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-3$ 时两直线平行．故选 A．

4.【答案】A

根据正弦定理有 $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，则 $AC=\dfrac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3$．故选 A．

5.【答案】A

因为直线 AB 过焦点 F，所以 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=1$，

所以$|AF|+2|BF|=(|AF|+2|BF|)\times(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|})=3+\frac{2|BF|}{|AF|}+\frac{|AF|}{|BF|}\geq 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{2|BF|}{|AF|}=\frac{|AF|}{|BF|}$时，等号成立．故选A．

6.【答案】C

∵由题意知讲座A只能安排在第一或最后一场，∴有$A_2^1=2$种结果，

∵讲座B和C必须相邻，∴共有$A_4^4A_2^2=48$种结果，

根据分步计数原理知共有$2\times 48=96$种结果．故选C．

7.【答案】C

设第一次从甲盒取出白球，红球，黑球的事件分别为A_1,A_2,A_3，

从甲盒中取出的球和从乙盒中取出的球颜色相同的事件为B，

则$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{x+1}{x+6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{x+6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{x+6}=\frac{2x+13}{5(x+6)}\geq\frac{5}{12},$$

解得$x\leq 6$，则x的最大值为6．故选C．

8.【答案】D

根据题意，正实数a，b满足$a>b$且$\ln a\cdot\ln b>0$，则有$a>b>1$或$0<b<a<1$，

依次分析选项：

对于A，无论$a>b>1$或$0<b<a<1$，都有$\log_a\frac{1}{b}<0$，所以A错误；

对于B，$a-b-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=a-b-(\frac{a-b}{ab})=(a-b)\frac{ab-1}{ab}$，

当$0<b<a<1$时，$a-b-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<0$，即$a-b<\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，所以B错误；

对于C，因为$ab+1-a-b=(a-1)(b-1)>0$，所以$ab+1>a+b$，所以$3^{ab+1}>3^{a+b}$，即C错误；

对于D，由$a^{b-1}<b^{a-1}$，两边取自然对数，得$(b-1)\ln a<(a-1)\ln b$，

因为$(a-1)(b-1)>0$，所以$\frac{\ln a}{a-1}<\frac{\ln b}{b-1}$，

设$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，

设$g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以$g(x)<g(1)=0$，所以$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上都是单调减函数，

所以$f(a)<f(b)$，即选项D正确．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.【答案】AC

选项 A：将 3，3，8，4，2，7，10，18 由小到大排列为 2，3，3，4，7，8，10，18，第 50 百分位数即为中位数，这组数的中位数为$\frac{1}{2}\times(4+7)=5.5$．

选项 B：由数据 x_1，x_2，…的平均数为 2，方差为 3，则数据 $2x_1+1$，$2x_2+1$，…的平均数为 $2\times2+1=5$，方差为 $2^2\times3=12$．

C 正确．

选项 D 中，样本的相关系数应满足 $-1\le r\le1$，故 D 错误．

10.【答案】AB

A 选项，

解法一：

由 $A(1,1)$，$B(4,2)$，则其中点为 $M(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$，所以 $r=|MA|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

则圆 M 的标准方程为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$，化为一般式方程为 $x^2+y^2-5x-3y+6=0$①，

又圆 C 的一般式方程为 $x^2+y^2-8x-2y+13=0$②，

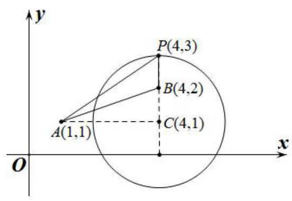
①－②得 $3x-y-7=0$ 为两圆相交弦所在的直线方程．

解法二：

以 $A(1,1)$，$B(4,2)$ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-4)+(y-1)(y-2)=0$，即 $x^2+y^2-5x-3y+6=0$①，

又圆 C 的一般式方程为 $x^2+y^2-8x-2y+13=0$②，

①－②得 $3x-y-7=0$ 为两圆相交弦所在的直线方程．



B 选项，

解法一：

由图可得 $AC\perp BP$，所以 $S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}|BP|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$．

解法二：

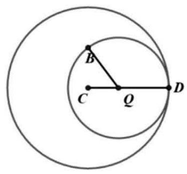
由直线 AB 的方程为 $x-3y+2=0$，则点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|4-9+2|}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\therefore S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{3}{2}$．

对于 C 选项，

由图可知设过点 B 且与圆 C 相内切的圆心为 Q，且切点为 D，

则 $|QB|+|QC|=|QD|+|QC|=|CD|=R=2>|BC|=1$ 满足椭圆定义，

故圆心 Q 的轨迹为椭圆．



对于 D 选项，

设 $P(x,y)$，$|PA|^2+|PB|^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-4)^2+(y-2)^2=2\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]+5$，

则 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$ 可转化为圆 C 上动点 $P(x,y)$ 到定点 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的距离的平方，

所以$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$的最小值为$d_{\min}=\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{13}{2}-2\sqrt{10}$，

故$\left(|PA|^2+|PB|^2\right)_{\min}=2\times\left(\frac{13}{2}-2\sqrt{10}\right)+5=18-4\sqrt{10}$.

11.【答案】BC

函数$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，

所得图象对应的函数为$y=g(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

对于A：当$x=\pi$时，$g(\pi)=-\frac{3}{2}$，故A错误；

对于B：当$x=\frac{\pi}{12}$时，$g\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$，故B正确；

对于C：当$x\in\left[-\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，故函数在该区间上单调递增，故C正确；

对于D：令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$，1，2，3时，$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{11\pi}{6}$，正好有4个极值点，故D错误.

12.【答案】ABC

对于A，若$MQ\perp$平面$AEMH$，因为$MH\subset$平面$AEMH$，所以$MQ\perp MH$，

又因为$\triangle MQH$为等边三角形，所以$\angle QMH=60^\circ$，所以A正确；

对于B，因为$BC//AD$，所以异面直线BC和EA所成的角即为直线AD和EA所成的角，

设角$\angle EAD=\theta$，在正六边形$ADGPNE$中，可得$\theta=120^\circ$，

所以异面直线BC和EA所成角为60°，所以B正确；

对于C，补全八个角构成一个棱长为$2\sqrt{2}$的一个正方体，

则该正方体的体积为$V=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$，

其中每个小三棱锥的体积为$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

所以该二十四面体的体积为$16\sqrt{2}-8\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{40\sqrt{2}}{3}$，所以C正确；

对于D，取正方形$ACPM$对角线的交点为O，即为该二十四面体的外接球的球心，

其半径为$R=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AM^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2$，

所以该二十四面体的外接球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\times2^2=16\pi$，所以D不正确.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.【答案】4045

由题意可知，直线l的方向向量为$\vec{a}=(1,1)$，所以直线$l:y=x+2$

所以$a_{n+1}=a_n+2$，所以$a_{2023}=a_3+2020\times2=4045$.

14. 【答案】$[30,42]$

依题意得$-1\le x\le 1$，设$P(x,y)$，

所以$\overrightarrow{AO}=(-6,0)$，$\overrightarrow{AP}=(x-6,y)$，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=(-6,0)\times(x-6,y)=-6x+36$，

所以当$x=-1$时，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$有最大值 42；当$x=1$时，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$有最小值 30.

所以取值范围为$[30,42]$.

15.【答案】$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

解法一： $\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\therefore$点$P$的轨迹为$x^2+y^2=b^2$，

又$\because$点P是以OF为直径的圆上的点，

$\therefore$点P为圆$x^2+y^2=b^2$与圆$(x-\dfrac{c}{2})^2+y^2=\dfrac{c^2}{4}$的交点，

又$\because \tan\angle PFO=2$，$\therefore$在直角三角形$OPF$中，$|OF|=c$，$|OP|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}c$，$|PF|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}c$，

又$\because |PO|=b$，$\therefore \dfrac{2c}{\sqrt{5}}=b$，$\dfrac{4c^2}{5}=a^2-c^2$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

解法二： $\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\therefore$点$P$的轨迹为$x^2+y^2=b^2$，

又$\because$点P是以OF为直径的圆上的点，

$\therefore$点P为圆$x^2+y^2=b^2$与圆$(x-\dfrac{c}{2})^2+y^2=\dfrac{c^2}{4}$的交点，

过点P作$PH\perp OF$，

又$\because \tan\angle PFO=2$，$\therefore |OF|=c$，$|OP|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}c$，$|PF|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}c$，

$\therefore P(\dfrac{4}{5}c,\dfrac{2}{5}c)$，代入圆$x^2+y^2=b^2$中，得$(\dfrac{4c}{5})^2+(\dfrac{2c}{5})^2=b^2=a^2-c^2$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

16.【答案】56；$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}$

由题意知，第 5 堆中，第 1 层 1 个球，第 2 层 3 个球，第 3 层 6 个球，第 4 层 10 个球，第 5 层 15 个球，故$S_5=1+3+6+10+15=35$.

则在第$n(n\ge 2)$堆中，从第 2 层起，第n层的球的个数比第$(n-1)$层的球的个数多n，记第n层球的个数为a_n，则$a_n-a_{n-1}=n(n\ge 2)$，

得$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$，

其中$a_1=1$也适合上式，则$a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{2}(n^2+n)$

在第n堆中，

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{1}{2}\left[\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+\left(1+2+3+\ldots+n\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)，$$

所以 $S_6=56$，

则 $\frac{1}{S_n}=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=3\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=3\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]=3\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{3}{2}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 解：（1）因为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C=\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C$，

所以由正弦定理得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\cos B$，......................................1 分

$\therefore \tan B=\sqrt{3}$，..2 分

又 $\because B\in(0,\pi)$，..3 分

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$．..4 分

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=7$，

所以 $b=\sqrt{7}$，..6 分

又因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$，..8 分

所以由余弦定理可得 $CD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，..9 分

所以 $AD=\frac{5\sqrt{7}}{7}$．..10 分

18.（1）证明：过点 P 作 $PE\perp AB$，交 AB 于点 E，作 $PF\perp CD$，交 CD 于点 F，连结 EF，则 $PF\perp AB$，

又 $PA=PD=\sqrt{3}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，$\angle APB=\angle CPD=90°$，

则 $\triangle PAB\cong\triangle PCD$，$PE=PF=\sqrt{2}$，$PE^2+PF^2=EF^2$，..................................3 分

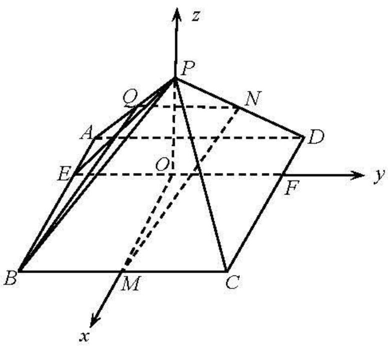
$\therefore PE\perp PF$，而 $PE\cap AB=E$，$\therefore PF\perp$ 平面 PAB．

又 $PF\subset$ 平面 PCD，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PCD..5 分

（2）解：取 EF 的中点为 O，连结 OP，则 $OP\perp EF$，$OP=1$，

则以 O 为原点，OM，OF，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $P(0,0,1)$，$C(2,1,0)$，$D(-1,1,0)$，$M(2,0,0)$，$N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，



$\therefore \overrightarrow{PC}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，.............8 分

设平面 PCD 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2x+y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=-x+y-z=0\end{cases}$，取 $z=1$，得 $\vec{n}=(0,1,1)$，..............10 分

设直线 MN 与平面 PCD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，

$\therefore$ 直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$． ....12 分

19. 解：（1）由题设可得 $a_2=3\times1+2=5$，$b_2=3\times2+1=7$，所以 $a_2+b_2=12$． ....2 分

又因为 $a_{n+1}=3a_n-(-1)^n b_n$，$b_{n+1}=3b_n-(-1)^n a_n$，

故 $a_{2n}=3a_{2n-1}+b_{2n-1}$，$b_{2n}=3b_{2n-1}+a_{2n-1}$，

$a_{2n-1}=3a_{2n-2}-b_{2n-2}$，$b_{2n-1}=3b_{2n-1}-a_{2n-2}$

所以 $a_{2n}+b_{2n}=4(a_{2n-1}+b_{2n-1})$，$a_{2n-1}+b_{2n-1}=2(a_{2n-2}+b_{2n-2})$，

得 $a_{2n}+b_{2n}=8(a_{2n-2}+b_{2n-2})$，

所以数列 $\{a_{2n}+b_{2n}\}$ 是首项为 12，公比为 8 的等比数列，

故 $a_{2n}+b_{2n}=12\times8^{n-1}$． ....5 分

（2）由题意得 $a_1-b_1=-1$，

又因为 $a_{n+1}=3a_n-(-1)^n b_n$，$b_{n+1}=3b_n-(-1)^n a_n$，

故 $a_{2n-1}-b_{2n-1}=(3a_{2n-2}-b_{2n-2})-(3b_{2n-2}-a_{2n-2})=4(a_{2n-2}-b_{2n-2})$，

$a_{2n-2}-b_{2n-2}=(3a_{2n-3}+b_{2n-3})-(3b_{2n-3}+a_{2n-3})=2(a_{2n-3}-b_{2n-3})$，

得 $a_{2n-1}-b_{2n-1}=8(a_{2n-3}-b_{2n-3})$，

所以数列 $\{a_{2n-1}+b_{2n-1}\}$ 是首项为－1，公比为 8 的等比数列，

故 $a_{2n-1}-b_{2n-1}=(1-2)\times8^{n-1}=-8^{n-1}$， ....8 分

因为 $T_{2n}=c_1+c_2+\ldots+c_{2n}$

$$=(a_1-b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_{2n-1}-b_{2n-1})+(a_{2n}+b_{2n})$$

$$=[(a_1-b_1)+(a_3-b_3)+\ldots+(a_{2n-1}-b_{2n-1})]+[(a_2+b_2)+(a_4+b_4)+\ldots+(a_{2n}+b_{2n})]$$

所以 $T_{2n}=\dfrac{-1\times(1-8^n)}{1-8}+\dfrac{12\times(1-8^n)}{1-8}=\dfrac{11\times(1-8^n)}{-7}=\dfrac{11\times(8^n-1)}{7}$． ....12 分

20. 解：（1）由题意可知，每个人选择项目 A 的概率为 $\dfrac{C_5^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$，则每个人不选择项目 A 的概率为 $\dfrac{2}{3}$，

故甲、乙、丙、丁这 4 个人中至少有一人选择项目 A 的概率为 $1-(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{65}{81}$ ....2 分

（2）由（1）可知，每个人选择项目 A 的概率为 $\dfrac{C_5^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{3}$，且每个人是否选择项目 A 相互独立，

故 X 服从二项分布：$X\sim B(4,\dfrac{1}{3})$，

所以 $P(X=k)=C_4^k(\dfrac{1}{3})^k(1-\dfrac{1}{3})^{4-k}(k=0,1,2,3,4)$，

$P(X=0)=(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$，$P(X=1)=C_4^1(\frac{1}{3})^1(1-\frac{1}{3})^3=\frac{32}{81}$，

$P(X=2)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(1-\frac{1}{3})^2=\frac{24}{81}$，$P(X=3)=C_4^3(\frac{1}{3})^3(1-\frac{1}{3})^1=\frac{8}{81}$，$P(X=4)=(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$，

则 X 的概率分布列为：

X	0	1	2	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{1}{81}$

$\therefore X$ 的数学期望 $E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$．……………………………………………………………6 分

（3）设选择项目 A 的人数最有可能为 k 人，

则 $\begin{cases}P(X=k)\geq P(X=k+1)\\P(X=k)\geq P(X=k-1)\end{cases}$，

$\because P(X=k)=C_n^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\frac{C_n^k\cdot 2^{n-k}}{3^n}$，

$\therefore\begin{cases}\frac{C_n^k\cdot 2^{n-k}}{3^n}\geq\frac{C_n^{k+1}\cdot 2^{n-k-1}}{3^n}\\\frac{C_n^k\cdot 2^{n-k}}{3^n}\geq\frac{C_n^{k-1}\cdot 2^{n-k+1}}{3^n}\end{cases}$，即 $\begin{cases}2C_n^k\geq C_n^{k+1}\\C_n^k\geq 2C_n^{k-1}\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\frac{2n!}{k!(n-k)!}\geq\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\\frac{n!}{k!(n-k)!}\geq\frac{2n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\end{cases}$，即 $\begin{cases}2(k+1)\geq n-k\\n-k+1\geq 2k\end{cases}$，

解得 $\frac{n-2}{3}\leq k\leq\frac{n+1}{3}$，……………………………………………………………9 分

又 $\because k\in\mathbf{N}$，

所以当 $n=3m+2$，$m\in\mathbf{N}_+$ 时，$k=m$ 或 $k=m+1$，选择项目 A 的人数为 $\frac{n-2}{3}$ 与 $\frac{n+1}{3}$ 的概率相同且最大，

即当 n 被 3 除余 2 时，选择项目 A 的人数最有可能是 $\frac{n-2}{3}$ 人和 $\frac{n+1}{3}$ 人；

同理，

当 $n=3m+1$，$m\in\mathbf{N}_+$，$m\geq 2$ 时，$k=m$，即当 n 被 3 除余 1 时，选择项目 A 的人数最有可能是 $\frac{n-1}{3}$ 人；

当 $n=3m$，$m\in\mathbf{N}_+$，$m\geq 2$ 时，$k=m$，即当 n 被 3 整除时，选择项目 A 的人数最有可能是 $\frac{n}{3}$ 人．

……………………………………………………………………………………12 分

21. 解：（1）设 $P(x,y)$，由题意可知 $k_{AP}\cdot k_{BP}=4$，

即 $\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=4\ (x\neq\pm1)$，……………………………………………………2 分

整理得点 P 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1\ (x\neq\pm1)$，……………………………………………4 分

（2）**解法一：** 由题意可设 l 的方程为 $x=my+\frac{1}{2}\left(m\neq\pm\frac{1}{2}\right)$，

联立 $\begin{cases}x=my+\frac{1}{2}\\x^2-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消 x 整理得 $(4m^2-1)y^2+4my-3=0$，

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 $\Delta=64m^2-12>0$，即 $m^2>\frac{3}{16}$，

由韦达定理有 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-4m}{4m^2-1}\\y_1y_2=\frac{-3}{4m^2-1}\end{cases}$，…………6 分

又直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，…………8 分

联立 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)\\y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)\end{cases}$，

解得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1-y_1+y_2}{x_1y_2-x_2y_1+y_1+y_2}=\frac{\left(my_1+\frac{1}{2}\right)y_2+\left(my_2+\frac{1}{2}\right)y_1-y_1+y_2}{\left(my_1+\frac{1}{2}\right)y_2-\left(my_2+\frac{1}{2}\right)y_1+y_1+y_2}$ …………9 分

$=\frac{2my_1y_2-\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}=\frac{2m\times\frac{-3}{4m^2-1}-\frac{1}{2}\times\frac{-4m}{4m^2-1}+2y_2}{\frac{1}{2}\times\frac{-4m}{4m^2-1}+y_2}=\frac{\frac{-4m}{4m^2-1}+2y_2}{\frac{-2m}{4m^2-1}+y_2}=2$，…………11 分

解得 $x=2$，

所以存在定直线，其方程为 $x=2$．…………12 分

解法二： 由题意可设 l 的方程为 $x=my+\frac{1}{2}\left(m\neq\pm\frac{1}{2}\right)$，

联立 $\begin{cases}x=my+\frac{1}{2}\\x^2-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消 x 整理得 $(4m^2-1)y^2+4my-3=0$，

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 $\Delta=64m^2-12>0$，即 $m^2>\frac{3}{16}$，

由韦达定理有 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-4m}{4m^2-1}\\y_1y_2=\frac{-3}{4m^2-1}\end{cases}$，…………6 分

又直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，…………8 分

联立$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1) \\ y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1) \end{cases}$，

又$2my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，

则$x=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1-y_1+y_2}{x_1y_2-x_2y_1+y_1+y_2}=\dfrac{\left(my_1+\dfrac{1}{2}\right)y_2+\left(my_2+\dfrac{1}{2}\right)y_1-y_1+y_2}{\left(my_1+\dfrac{1}{2}\right)y_2-\left(my_2+\dfrac{1}{2}\right)y_1+y_1+y_2}$ ……………9 分

$=\dfrac{2my_1y_2-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}=\dfrac{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}=\dfrac{y_1+3y_2}{\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}=2$， ……………11 分

解得$x=2$，

所以存在定直线，其方程为$x=2$.

解法三：由题意可设l的方程为$x=my+\dfrac{1}{2}\left(m\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$，

联立$\begin{cases} x=my+\dfrac{1}{2} \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，消$x$整理得$(4m^2-1)y^2+4my-3=0$，

设$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则$\Delta=64m^2-12>0$，即$m^2>\dfrac{3}{16}$，

由韦达定理有$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-4m}{4m^2-1} \\ y_1y_2=\dfrac{-3}{4m^2-1} \end{cases}$，…………………………………………………………………………6 分

又直线AC的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，直线$BD$的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，……………………8 分

联立$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1) \\ y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1) \end{cases}$，

得$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}=\dfrac{y_2\left(my_1+\dfrac{3}{2}\right)}{y_1\left(my_2-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{my_1y_2+\dfrac{3}{2}y_2}{my_1y_2-\dfrac{1}{2}y_1}=\dfrac{\dfrac{-3m}{4m^2-1}+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{-3m}{4m^2-1}-\dfrac{1}{2}y_1}=\dfrac{\dfrac{3}{4}(y_1+y_2)+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{3}{4}(y_1+y_2)-\dfrac{1}{2}y_1}=3$，

………………………………………………………………………………………11 分

解得$x=2$，

所以存在定直线，其方程为$x=2$. ………………………………………………12 分

22. 证明：（1）函数 $f(x)=a\ln x+x+\frac{2}{x}+2a$ 的定义域为 $(0,\ +\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+ax-2}{x^2}$．……1 分

对于方程 $x^2+ax-2=0$，$\Delta=a^2+8>0$．

解方程 $x^2+ax-2=0$，

可得 $x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2}<0$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}>0$，……………………………………2 分

当 $0<x<\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，…………………4 分

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增．

所以函数 $f(x)$ 有唯一极小值点．…………………………………………………………5 分

（2）要证明 $f(x)<x+\frac{e^x+2}{x}$，

即证 $x+a\ln x+\frac{2}{x}+2a<x+\frac{e^x+2}{x}$，

即证 $a(\ln x+2)<\frac{e^x}{x}$，即证 $\frac{a(\ln x+2)}{x}<\frac{e^x}{x^2}$．……………………………………6 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$，此时函数 $g(x)$ 单调递减；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，此时函数 $g(x)$ 单调递增．

所以 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}$．…………8 分

构造函数 $h(x)=\frac{a(\ln x+2)}{x}$，其中 $0<a<\frac{e}{4}$，$x>0$，

则 $h'(x)=-\frac{a(\ln x+1)}{x^2}$．

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 单调递增；

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 单调递减．……………………………………10 分

所以 $h(x)_{\max}=h(\frac{1}{e})=ae<\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)_{\max}<g(x)_{\min}$，

所以 $\frac{a(\ln x+2)}{x}<\frac{e^x}{x^2}$．

故原不等式得证．………………………………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。