长春市 2023 届高三质量监测（四）参考答案与评分标准

数学

一、单项选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	B	B	B	A	C	B

二、多项选择题：

9	10	11	12
ABC	ACD	ACD	CD

三、填空题：（本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,把答案填在答卷纸的相应位置上）

13. $c<a<b$； 14. 8；

15. $[\frac{1}{e},1]$； 16. $[2,2\sqrt{2}]$

四、解答题：

17.(本小题满分 10 分)

（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin wx+1+\cos wx+m=2\sin(wx+\frac{\pi}{6})+m+1$

因为 $f(x)$ 的最小值为 -2

所以 $-2+m+1=-2\ \therefore m=-1\ \therefore f(n)=2\sin(wx+\frac{\pi}{6})$

从而 $f(x)$ 得最大值为 2.

（2）$g(x)=2\sin(w(x-\frac{\pi}{6w})+\frac{\pi}{6})=2\sin wx$

$\because y=g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{8}]$ 上为增函数 $\therefore \frac{\pi}{8}w\le\frac{\pi}{2}\ \therefore w\le 4\ \therefore w$ 的最大值为 4.

18.(本小题满分 12 分)

解：（1）设 $\sqrt{a_n}$ 的公差为 d （$d>0$）

$\therefore \sqrt{a_1}=\sqrt{a_2}-d=2-d$

$\therefore \sqrt{a_3}=\sqrt{a_2}+d=2+d$

$\because a_1+a_3=10\ \therefore (2-d)^2+(2+d)^2=10$ 解得 $d=1$ 或 $d=-1$（舍）

$\therefore \sqrt{a_n}=n\ \therefore a_n=n^2$.

（2）$\because a_i+a_{i+1}=i^2+(i+1)^2=2i^2+2i+1>2i(i+1)$

$\therefore \frac{1}{a_i+a_i+1}<\frac{1}{2}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+a_{i+1}}<\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{2(n+1)}$，即证.

19.（本小题满分 12 分）

（1）设 A 口袋中有 n 个白球，则 $\begin{cases}\frac{n}{m}=\frac{2}{3}\\ \frac{2+n}{6+m}=\frac{4}{9}\end{cases}$，解得 $n=2,m=3$

设事件 B_i 表示从 B 口袋中第 i 次取出的是红球，有 $P(B_i)=\frac{2}{3}$，设事件 C 表示从 B 口袋中有放回的各取 1 球恰好第 3 次后停止，则

$P(C)=P(B_1B_2\overline{B_3})=P(B_1)P(B_2)(1-P(B_3))=\frac{4}{27}$

（2）设事件 D_1 表示从 A 口袋中取出一个球是红球，$P(D_1)=\frac{1}{3}$，D_2 表示从 B 口袋中取出一个球是红球，$P(D_2)=\frac{2}{3}$，事件 E 表示第三人从两个口袋中各取一球是同色球，有 $P(E)=P(D_1D_2+\overline{D_1}\,\overline{D_2})=\frac{4}{9}$，所以游戏不公平.

（3）设 X 表示从 B 口袋中一次取 3 个球的得分，则 X 的可取值为 $3,4,5$

有 $P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5},P(X=4)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5},P(X=5)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

从而 $E(X)=3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{5}+5\times\frac{1}{5}=4$

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）在 $\triangle ABP$ 中做 $AD\perp PB$ 于 D，则 $CD\perp PB$，

$\triangle ABP$ 中，$\cos\angle PAB=\frac{1}{\sqrt{10}}$，则 $\sin\angle PAB=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot PA\cdot AB\cdot\sin\angle PAB=\frac{1}{2}\cdot PB\cdot AD$，则 $AD=2\sqrt{2}$，即 $CD=2\sqrt{2}$，

$\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，即二面角 $A-PB-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$，故平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.

（2）过点 P 做 $PH\perp AC$ 于 H，由平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，
且平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$ 可知，$PH\perp$ 平面 ABC，又 $PO\perp$ 平面 ABC，
则点 H 即为点 O.
以 O 为原点，OC 方向为 x 轴，OB 方向为 y 轴，OP 方向为 z 轴，建立空间坐标系，
则 $P(0,0,2)$，$C(2,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$
平面 PAB 中，$\overrightarrow{AB}=(2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(2,0,2)$，$\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$，
平面 PBC 中，$\overrightarrow{CB}=(-2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,0,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，
$\cos\theta=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{1}{7}$，即平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可设$a=\sqrt{2}t$，$c=t$（$t>0$），则$b=t$.

四个顶点构成的四边形为菱形，其面积为$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}t\cdot 2t=2\sqrt{2}t^2=2\sqrt{2}$，

即$t=1$，即椭圆的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|m|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

联立直线$y=kx+m$与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$消去y可得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{(\frac{-4km}{1+2k^2})^2-4\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}=|m|\cdot\frac{\sqrt{4k^2-2m^2+2}}{1+2k^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

可得$2m^2=2k^2+1$，

而$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\frac{-4km}{1+2k^2})^2-2\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}=2$，为定值.

22.（本小题满分 12 分）

解：（1）令$g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\ln(x+1)-\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{\sqrt{x+1}-x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{1-\sqrt{x+1}-\frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{2\sqrt{x+1}-3x-2}{2\sqrt{x+1}-(x+1)}$$

解$2\sqrt{x+1}-(2x+2)\le 0$得$x\ge 0$或$x\le -\frac{8}{5}$故当$x\ge 0$时，$g'(x)\le 0$

$\therefore g(x)$在$[0,+\infty)$减，又$g(0)=0$，$\therefore f(x)\le\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

（2）$x=0$是方程$\ln(x+1)=k\sqrt{x}$一个根，

$x>0$时，$\ln(x+1)=k\sqrt{x}$恰 1 根

令$g(x)=k\sqrt{x}-\ln(x+1)$，

$g'(x)=\frac{k(x+1)-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)}$（$x>0$）

设$h(x)=k(x+1)-2\sqrt{x}$（$x>0$）

$h'(x)=k-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{k\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$h(x)$在$(0,\frac{1}{k^2})$上单调递减，在$(\frac{1}{k^2},+\infty)$上单调递增，

所以$h(x)$的最小值为$h(\frac{1}{k^2})=k(\frac{1}{k^2}+1)-2\cdot\frac{1}{k}=k-\frac{1}{k}$

$\therefore g(x)$在$(0,\alpha)$单调递增，(α,β)单调递减，$(\beta,+\infty)$单调递增，

又$g(e^{\frac{4}{k}})>0$，$\therefore$只需$g(\beta)=0$

$$\therefore\begin{cases}k(\beta+1)=2\sqrt{\beta}\\ g(\beta)=k\sqrt{\beta}-\ln(\beta+1)=0\end{cases}$$

$k=\frac{2\sqrt{\beta}}{\beta+1}$，设$g(\beta)=\frac{2\beta}{\beta+1}-\ln(\beta+1)=t(\beta)$，

$t'(\beta)=\frac{1-\beta}{(\beta+1)^2}$，由$t(0)=0$，$t(3)>0$，$t(4)<0$

$\therefore 3<\beta<4$，因此$k\in(\frac{4}{5},\frac{\sqrt{3}}{2})$.