

## 2021 届高三 1 月八省联考考前热身押题卷

### 数学

一、单选题(本题共 8 小题. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的).

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 = 9\}$ , 则  $(A \cap B) \cup C =$  ( )

- A.  $\{2, 3\}$       B.  $\{-3, 2, 3\}$       C.  $\{-3, 3\}$       D.  $\{-3, 2, 3, 4\}$

2. 设复数  $z_1, z_2$  在复平面内对应的点关于实轴对称,  $z_1 = 2 + i$ , 则  $\frac{z_1}{z_2} =$  ( )

- A.  $1 + i$       B.  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$   
 C.  $1 + \frac{4}{5}i$       D.  $1 + \frac{4}{3}i$

3. 命题  $P$ : “ $3 < m < 5$ ” 是命题  $Q$ : “曲线  $\frac{x^2}{m-3} - \frac{y^2}{5-m} = 1$ ” 表示双曲线” 的 ( )

- A. 充要条件      B. 充分不必要条件  
 C. 必要不充分条件      D. 既不充分也不必要条件

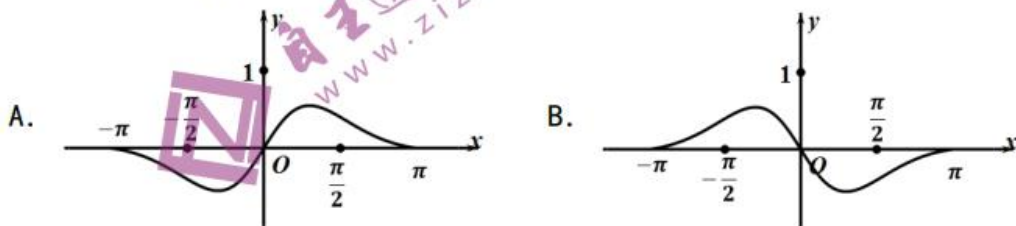
4. 设  $a > 0, b > 0$ ,  $\lg \sqrt{2}$  是  $\lg 4^a$  与  $\lg 2^b$  的等差中项, 则  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为 ( )

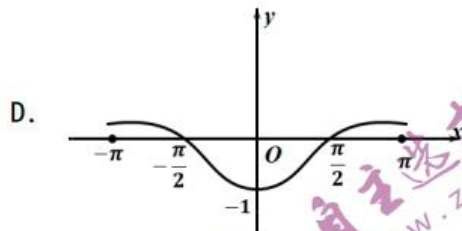
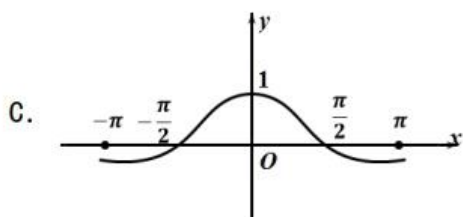
- A.  $2\sqrt{2}$       B. 3      C. 9      D.  $3\sqrt{2}$

5. 已知  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{1}{3}$ , 则  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $-\frac{1}{3}$       C.  $\frac{7}{9}$       D.  $-\frac{7}{9}$

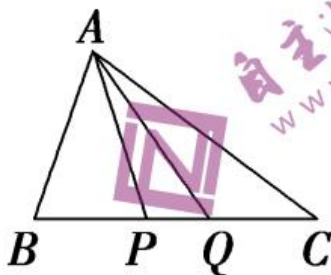
6. 函数  $f(x) = \frac{2 \sin x}{e^x + e^{-x}}$  在  $[-\pi, \pi]$  的大致图象是 ( ) .





7. 将一线段  $AB$  分为两线段  $AC, CB$ , 使得其中较长的一段  $AC$  是全长  $AB$  与另一段  $CB$  的比例中项, 即满足  $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 后人把这个数称为黄金分割, 把点  $C$  称为线段  $AB$  的黄金分割点.

图中在  $\triangle ABC$  中, 若点  $P, Q$  为线段  $BC$  的两个黄金分割点, 在  $\triangle ABC$  内任取一点  $M$ , 则点  $M$  落在  $\triangle APQ$  内的概率为 ( )



A.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B.  $\sqrt{5}-2$

C.  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

8. 已知抛物线  $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线与  $x$  轴的交点为  $E$ , 线段  $EF$  被双曲线

$C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  顶点三等分, 且两曲线  $C_1, C_2$  的交点连线过曲线  $C_1$  的焦点  $F$ , 则双曲线  $C_2$  的离心率为 ( )

A.  $\sqrt{2}$

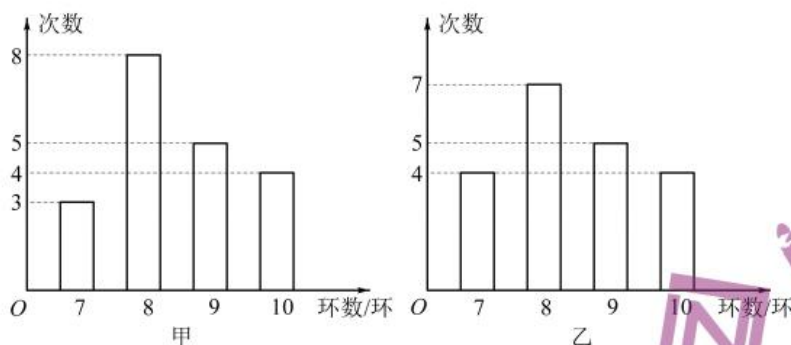
B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{11}}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{22}}{2}$

二、多选题本题共 4 小题. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

9. 甲、乙两名射击运动员在某次测试中各射击 20 次, 两人测试成绩的条形图如图所示, 则 ( )



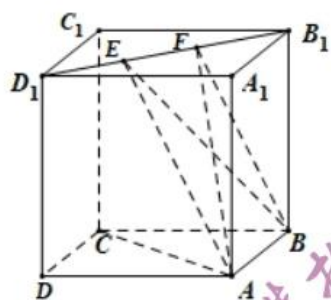
- A. 甲运动员测试成绩的中位数等于乙运动员测试成绩的中位数
- B. 甲运动员测试成绩的众数大于乙运动员测试成绩的众数
- C. 甲运动员测试成绩的平均数大于乙运动员测试成绩的平均数
- D. 甲运动员测试成绩的方差小于乙运动员测试成绩的方差

10. 若函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin^2 x + \cos^2 x$  在  $[-a, a]$  上为增函数, 则 ( )

- A. 实数  $a$  的取值范围为  $(0, \frac{\pi}{6}]$
- B. 实数  $a$  的取值范围为  $(0, \frac{\pi}{3}]$
- C. 点  $(\frac{\pi}{12}, 2)$  为曲线  $y = f(x)$  的对称中心
- D. 直线  $x = \frac{\pi}{3}$  为曲线  $y = f(x)$  的对称轴

11. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E, F$ , 且  $EF = \frac{1}{2}$ ,

则下列结论中正确的是 ( )



- A. 异面直线  $AE, BF$  所成角为定值
- B.  $AC \perp BF$
- C.  $\triangle AEF$  的面积与  $\triangle BEF$  的面积相等
- D. 三棱锥  $A - BEF$  的体积为定值



12. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足:  $f(x)+f'(x)>1$ ,  $f(0)=4$ , 则关于不等式  $e^x f(x)>e^x+3$  的表述正确的为 ( )

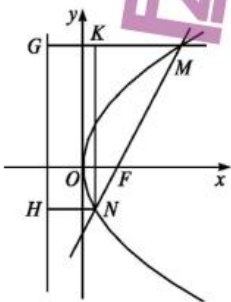
- A. 解集为  $(0, +\infty)$
- B. 解集为  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$
- C. 在  $[-2, 2]$  上有解
- D. 在  $[-2, 2]$  上恒成立

三、填空题本题共 4 小题.

13. 已知非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  满足  $3|\vec{b}|=4|\vec{a}|$ , 若  $\vec{b} \perp (-4\vec{a}+\vec{b})$ , 则  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  夹角的大小为\_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x)$  满足  $f(x+2)=\frac{x+3}{x+2}$ , 则  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上的值域为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $M, N$  是过抛物线  $C: y^2=2px(p>0)$  的焦点  $F$  的直线  $l$  与抛物线  $C$  的交点,  $O$  是坐标原点, 且满足  $\overline{MF}=3\overline{FN}$ ,  $S_{\triangle OMN}=\sqrt{3}|MN|$ , 则  $p$  的值为\_\_\_\_\_.



16. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $na_{n+1}-(n+1)a_n+\frac{1}{2}=0$ , 且  $a_1=\frac{3}{2}$ . 若对任意的  $n \in N^*$ , 都有  $m > \frac{S_n}{2^n}$ , 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题本大题共 6 小题. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在①  $b \sin A + a \sin B = 4c \sin A \sin B$ , ②  $\cos 2C - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{C}{2} + \sqrt{3} = 2$ , ③

$(a - \sqrt{3}b) \sin A + b \sin B = c \sin C$ , 这三个条件中任选一个, 补充到下面的问题中, 并解决该问题.

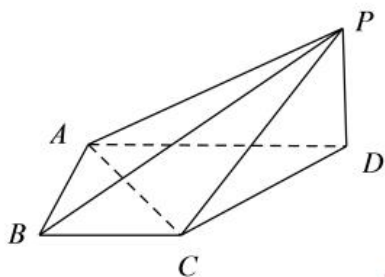
已知  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边,  $\sin A \sin B = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $c=2$ , \_\_\_\_\_, 求角  $C$  及  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

18. 设数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$ 、 $T_n$ , 且  $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n)$ ,  $T_n = 2(b_n \cdots)$  ( $n \in N^*$ )



- (1) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 令  $c_n = a_n \cdot b_n$ , 求  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $U_n$ .

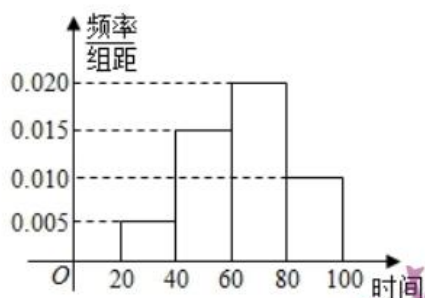
19. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AB = BC = PD = 1$ ,  $AD = 2$ .



- (1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $PCD$
- (2) 求平面  $PAB$  与平面  $PCD$  所成锐二面角的余弦值.

20. 2020 年国庆节期间, 我国高速公路继续执行“节假日高速公路免费政策”. 某路桥公司为掌握国庆节期间车辆出行的高峰情况, 在某高速公路收费站记录了 3 日上午 9:20~10:40 这一时间段内通过的车辆数, 统计发现这一时间段内共有 600 辆车通过该收费站, 它们通过该收费站的时刻的频率分布直方图如下图所示, 其中时间段 9:20~9:40 记作  $[20, 40)$ ,

9:40~10:00 记作  $[40, 60)$ , 10:00~10:20 记作  $[60, 80)$ , 10:20~10:40 记作  $[80, 100)$ , 例如: 10 点 04 分, 记作时刻 64.



- (I) 估计这 600 辆车在 9:20~10:40 时间内通过该收费站的时刻的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);
- (II) 为了对数据进行分析, 现采用分层抽样的方法从这 600 辆车中抽取 10 辆, 再从这 10 辆车随机抽取 4 辆, 设抽到的 4 辆车中, 在 9:20~10:00 之间通过的车辆数为  $X$ , 求  $X$  的分布列;
- (III) 根据大数据分析, 车辆在每天通过该收费站的时刻  $T$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中

$\mu$  可用 3 日数据中的 600 辆车在 9:20~10:40 之间通过该收费站点的时刻的平均值近似代替,  $\sigma^2$  用样本的方差近似代替 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表). 假如 4 日全天共有 1000 辆车通过该收费站点, 估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数 (结果保留到整数).

附: 若随机变量  $T$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < T \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ ,

$$P(\mu - 2\sigma < T \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545, \quad P(\mu - 3\sigma < T \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973.$$

21. 已知点  $F(1, 0)$ , 直线  $L: x = -1$ ,  $P$  为平面上的动点, 过点  $P$  作直线  $L$  的垂线, 垂足为  $Q$ , 且  $\overline{QP} \cdot \overline{QF} = \overline{FP} \cdot \overline{FQ}$ .

(1) 求点  $P$  的轨迹  $C$  的方程.

(2) 是否存在正数  $m$ , 对于过点  $M(m, 0)$  且与曲线  $C$  有两个交点  $A, B$  的任一直线, 都有  $\overline{FA} \cdot \overline{FB} < 0$ ? 若存在, 求出  $m$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数  $f(x) = a \ln x + x + 2a (a \in R)$

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $0 < a < \frac{e}{4}$ , 求证:  $f(x) < x + \frac{e^x}{x}$ .



参考答案

1. B

解: 由题意化简集合得:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$ ,  $C = \{-3, 3\}$

所以  $A \cap B = \{2, 3\}$ ,

所以  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3\} \cup \{-3, 3\} = \{-3, 2, 3\}$ .

2. B

因为复数  $z_1, z_2$  在复平面内对应的点关于实轴对称,  $z_1 = 2 + i$ , 所以  $z_2 = 2 - i$ ,

所以  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ .

3. A

曲线  $\frac{x^2}{m-3} - \frac{y^2}{5-m} = 1$  表示双曲线,

可得  $(m-3)(5-m) > 0$ , 解得  $3 < m < 5$ ,

命题  $P$ : “ $3 < m < 5$ ” 是命题  $Q$ : “曲线  $\frac{x^2}{m-3} - \frac{y^2}{5-m} = 1$ ” 表示双曲线” 的充要条件,

4. C

解:  $Q a > 0, b > 0, \lg \sqrt{2}$  是  $\lg 4^a$  与  $\lg 2^b$  的等差中项,

$\therefore 2\lg \sqrt{2} = \lg 4^a + \lg 2^b, \therefore \lg 2 = \lg 2^{2a+b}$ ,

即  $2 = 2^{2a+b}$ , 即  $2a+b=1$ ,

则  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)(2a+b) = 5 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a}} = 9$ ,

当且仅当  $\frac{2a}{b} = \frac{2b}{a}$ , 即  $a=b=\frac{1}{3}$  时取等号.

5. D

因为  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$   
 $= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$ ,



$$\text{所以 } \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

6. A

因为  $f(x) = \frac{2\sin x}{e^x + e^{-x}}$ , 所以  $f(-x) = \frac{2\sin(-x)}{e^{-x} + e^x} = -\frac{2\sin x}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的奇

函数, 其图象关于原点对称, 故 C、D 不正确;

当  $x \in (0, \pi)$  时,  $\sin x > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 故 B 不正确;

7. B

由几何概型公式知,

$$\text{所求概率为 } \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{PQ}{BC} = \frac{BQ - BP}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}BC - \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)BC}{BC} = \sqrt{5} - 2.$$

8. D

抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点为  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 准线方程为  $x = -\frac{p}{2}$ ,  $E\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ ,

$|EF| = p$ ,

因为线段  $EF$  被双曲线  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  顶点三等分, 所以  $2a = \frac{p}{3}$ , 即  $p = 6a$ ,

因为两曲线  $C_1, C_2$  的交点连线过曲线  $C_1$  的焦点  $F$ , 所以两个交点为  $\left(\frac{p}{2}, p\right), \left(\frac{p}{2}, -p\right)$ ,

将  $\left(\frac{p}{2}, p\right)$  代入双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  得  $\frac{p^2}{4a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$ ,

$$\text{所以 } \frac{36a^2}{4a^2} - \frac{36a^2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } 9 - \frac{36a^2}{b^2} = 1, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{所以双曲线 } C_2 \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

9. AD

由图可得甲运动员测试成绩中 3 次 7 环, 8 次 8 环, 5 次 9 环, 4 次 10 环,

所以甲运动员测试成绩的中位数为 8, 众数为 8,

$$\text{平均数为 } \frac{3 \times 7 + 8 \times 8 + 5 \times 9 + 4 \times 10}{20} = 8.5,$$





$$\text{方差} = \frac{(7-8.5)^2 \times 3 + (8-8.5)^2 \times 8 + (9-8.5)^2 \times 5 + (10-8.5)^2 \times 4}{20} = \frac{19}{20};$$

乙运动员测试成绩中4次7环, 7次8环, 4次9环, 5次10环,

所以乙运动员测试成绩的中位数为8, 众数为8,

$$\text{平均数为} \frac{4 \times 7 + 7 \times 8 + 4 \times 9 + 5 \times 10}{20} = 8.5,$$

$$\text{方差} = \frac{(7-8.5)^2 \times 4 + (8-8.5)^2 \times 7 + (9-8.5)^2 \times 4 + (10-8.5)^2 \times 5}{20} = \frac{23}{20},$$

故选项A正确, B不正确, C不正确, D正确,

#### 10. ACD

由题意, 函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin^2 x + \cos^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x + 1$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2 = 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) + 2,$$

令  $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ , 可得  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $0 < a \leq \frac{\pi}{6}$ , 所以A正确, B不正确;

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{12}, \text{ 可得 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin \left( 2 \times \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right) + 2 = 2,$$

所以点  $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$  为曲线  $y = f(x)$  的对称中心, 所以C正确;

令  $x = \frac{\pi}{3}$ , 可得  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \left( 2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + 2 = 4$ , 所以  $x = \frac{\pi}{3}$  为曲线  $y = f(x)$  的对称轴, 所以D

正确.

#### 11. BD

解: 以D为坐标原点, 建立如图所示空间直角坐标系.

则  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ , 设  $E(a, a, 1)$ ,

则  $F\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}, a + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ,

其中  $0 < a < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\overline{AE} = (a-1, a, 1), \quad \overline{BF} = \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, a + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, 1\right),$$



$$\cos \langle \overline{AE}, \overline{BF} \rangle = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BF}}{|\overline{AE}| |\overline{BF}|} = \frac{(2a-1)(a + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + 1}{\sqrt{(a-1)^2 + a^2 + 1} \cdot \sqrt{2(a + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2 + 1}}$$

$$\text{取 } a=0 \text{ 时, } \cos \langle \overline{AE}, \overline{BF} \rangle = \frac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$

$$\text{取 } a=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } \cos \langle \overline{AE}, \overline{BF} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}},$$

$\therefore \frac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}} \neq \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ ,  $\therefore$  异面直线  $AE$ ,  $BF$  所成角不是定值, 故  $A$  错误;

由正方体的结构特征可知,  $DD_1 \perp AC$ ,  $BD \perp AC$ , 又  $BD \cap DD_1 = D$ ,

$\therefore AC \perp$  平面  $BDD_1B_1$ , 则  $AC \perp BF$ , 故  $B$  正确;

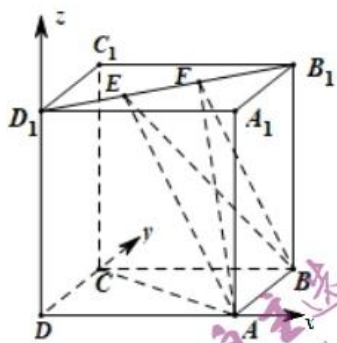
$B$  到  $B_1D_1$  的距离为  $BB_1=1$ ,  $A$  到  $B_1D_1$  的距离大于上下底面中心的连线, 则  $A$  到  $B_1D_1$  的距离大于 1,

$\therefore \triangle AEF$  的面积大于  $\triangle BEF$  的面积, 故  $C$  错误;

$A$  到平面  $BDD_1B_1$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\triangle BEF$  的面积为定值,  $\therefore$  三棱锥  $A-BEF$  的体积为定值, 故  $D$

正确.

故选:  $BD$ .



12.  $AC$

令  $g(x) = e^x [f(x) - 1]$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $g'(x) = e^x [f(x) - 1 + f'(x)]$ ,

$\therefore f(x) + f'(x) > 1$ ,



$\therefore g'(x) > 0$  恒成立, 即  $g(x)$  在  $R$  上单调递增.

$\therefore f(0) = 4,$

$\therefore g(0) = e^0[f(0) - 1] = 3.$

不等式  $e^x f(x) > e^x + 3$  可化为  $e^x[f(x) - 1] > 3$ , 等价于  $g(x) > g(0)$ ,

$\therefore x > 0$ , 即不等式  $e^x f(x) > e^x + 3$  的解集为  $(0, +\infty)$ ,

则在  $[-2, 2]$  上有解, 故选项 AC 正确.

13.  $\arccos \frac{1}{3}$

因为  $\vec{b} \perp (-4\vec{a} + \vec{b})$ , 所以  $\vec{b} \cdot (-4\vec{a} + \vec{b}) = 0$ ,

所以  $-4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 0$ , 即  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b}^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2$ ,

所以  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{4}|\vec{b}|^2}{\frac{3}{4}|\vec{b}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{3}$ ,

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \arccos \frac{1}{3}$ .

14.  $(1, 2]$

解:  $\therefore f(x+2) = \frac{x+2+1}{x+2}$ ,

$\therefore f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ ,

又  $\therefore x \geq 1$ ,

$\therefore f(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递减.

由  $\therefore f(1) = 1 + 1 = 2$ ,

$\therefore 1 < f(x) \leq 2$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  的值域为  $(1, 2]$ .



15. 8

解: 不妨设直线  $MN$  的斜率  $k > 0$ , 过  $M, N$  作抛物线准线的垂线, 垂足分别为  $G, H$ ,

过  $N$  作  $NK \perp MG$  于  $K$ ,

由  $\overline{MF} = 3\overline{FN}$ , 得  $|MF| = 3|FN|$ ,  $\therefore |MG| = 3|NH|$ ,

$\therefore |MK| = 2|NH| = 2|NF| = \frac{1}{2}|MN|$ ,

$\therefore |NK| = \sqrt{|MN|^2 - |MK|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$ ,

由  $S_{\triangle OMN} = S_{\triangle OMF} + S_{\triangle ONF} = \frac{1}{2}|OF| \cdot |NK| = \frac{\sqrt{3}}{8}p|MN|$ ,

又  $S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}|MN|^2$ ,

所以  $\frac{\sqrt{3}}{8}p|MN| = \frac{\sqrt{3}}{4}|MN|^2$ ,

$\therefore p = 8$ .

16.  $(1, +\infty)$

依题意,  $na_{n+1} - (n+1)a_n + \frac{1}{2} = 0$ , 则  $(n+1)a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} + \frac{1}{2} = 0$ ,

两式相减, 可得  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ , 所以  $\{a_n\}$  为等差数列,

由  $na_{n+1} - (n+1)a_n + \frac{1}{2} = 0$ , 得  $a_2 - 2a_1 + \frac{1}{2} = 0$ , 又  $a_1 = \frac{3}{2}$ , 解得  $a_2 = \frac{5}{2}$ ,

所以  $d = a_2 - a_1 = 1$ , 则  $S_n = \frac{3}{2}n + \frac{n(n-1)}{2}$ , 所以  $\frac{S_n}{2^n} = \frac{n^2 + 2n}{2^{n+1}}$ .

令  $b_n = \frac{S_n}{2^n} = \frac{n^2 + 2n}{2^{n+1}}$ ,  $b_{n+1} - b_n = \frac{3-n^2}{2^{n+2}}$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $b_{n+1} - b_n < 0$ , 数列  $\{b_n\}$  单调递减,

而  $b_1 = \frac{3}{4}$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = \frac{15}{16}$ , 故  $m > 1$ .

故答案为:  $(1, +\infty)$ .

17.



选①  $b \sin A + a \sin B = 4c \sin A \sin B$ ,

因为  $b \sin A + a \sin B = 4c \sin A \sin B$ ,

所以由正弦定理得  $\sin B \sin A + \sin A \sin B = 4 \sin C \sin A \sin B$ ,

即  $2 \sin B \sin A = 4 \sin C \sin A \sin B$ , 所以  $\sin C = \frac{1}{2}$ ,

因为  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $C = \frac{\pi}{6}$  或  $C = \frac{5\pi}{6}$ .

若  $C = \frac{5\pi}{6}$ , 由  $\sin A \sin B = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,

而  $A < \frac{\pi}{6}$ ,  $B < \frac{\pi}{6}$ , 从而  $\sin A \sin B < \frac{1}{4}$ , 矛盾, 舍去.

故  $C = \frac{\pi}{6}$ ,

接下来求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

法一: 设  $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $R$ , 则由正弦定理得  $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = 4$ ,

$\therefore a = 2R \sin A = 4 \sin A$ ,  $b = 2R \sin B = 4 \sin B$ ,

$\therefore ab = 16 \sin A \sin B = 4(1+\sqrt{3})$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4(1+\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{3}$ .

法二: 由 (1) 得  $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 即  $\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$\therefore \sin A \sin B = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $\therefore \cos A \cos B = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ ,

$\therefore \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore A-B \in (-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ,  $\therefore A-B = \frac{\pi}{3}$  或  $B-A = \frac{\pi}{3}$ ,

当  $A-B = \frac{\pi}{3}$  时, 又  $A+B = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\therefore A = \frac{7\pi}{12}$ ,  $B = \frac{\pi}{4}$ ,

由正弦定理得  $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 \sin \frac{7\pi}{12} = 2\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}$ ,

当  $B-A = \frac{\pi}{3}$  时, 同理可得  $S_{\triangle ABC} = 1 + \sqrt{3}$ ,



故  $\triangle ABC$  的面积为  $1+\sqrt{3}$ .

选②  $\cos 2C - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{C}{2} + \sqrt{3} = 2$ ,

因为  $\cos 2C - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{C}{2} + \sqrt{3} = 2$ ,

所以  $2 \cos^2 C - 1 - \sqrt{3}(1 - \cos C) + \sqrt{3} - 2 = 0$ , 即  $2 \cos^2 C + \sqrt{3} \cos C - 3 = 0$ ,

$(2 \cos C - \sqrt{3})(\cos C + \sqrt{3}) = 0$ ,

所以  $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\cos C = -\sqrt{3}$  (舍),

因为  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $C = \frac{\pi}{6}$ .

以下同解法同①,

选③  $(a - \sqrt{3}b) \sin A + b \sin B = c \sin C$ ,

由  $(a - \sqrt{3}b) \sin A + b \sin B = c \sin C$  及正弦定理得  $(a - \sqrt{3}b)a + b^2 = c^2$ ,

即  $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab$ ,

由余弦定理得  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$\because 0 < C < \pi$ ,

$\therefore C = \frac{\pi}{6}$ ,

18.

(1) 由  $S_n = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n)$  得  $a_1 = S_1 = 5$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n) - \frac{1}{2}[3(n-1)^2 + 7(n-1)] = 3n + 2$ ,

当  $n = 1$  时,  $a_1 = 3 + 2 = 5$  也适合,

故  $a_n = 3n + 2$ .

由  $T_n = 2(b_n - 1)$  得  $b_1 = T_1 = 2(b_1 - 1)$ , 得  $b_1 = 2$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $b_n = T_n - T_{n-1} = 2(b_n - 1) - 2(b_{n-1} - 1)$ , 得  $b_n = 2b_{n-1}$ .



又  $b_1 = 2$ , 所以  $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2$ , 所以数列  $\{b_n\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以  $b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ .

综上所述:  $a_n = 3n + 2$ ,  $b_n = 2^n$ .

$$(2) c_n = a_n b_n = (3n + 2) \times 2^n,$$

所以  $U_n = 5 \times 2^1 + 8 \times 2^2 + 11 \times 2^3 + \dots + (3n + 2) \times 2^n$ ,

所以  $2U_n = 5 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + 11 \times 2^4 + \dots + (3n + 2) \times 2^{n+1}$ ,

所以  $U_n - 2U_n = 5 \times 2 + 3(2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - (3n + 2) \times 2^{n+1}$ ,

所以  $-U_n = 4 + 3(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - (3n + 2) \times 2^{n+1}$

$$= 4 + 3 \times \frac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} - (3n + 2) \times 2^{n+1}$$

$$= (-6n + 2) \times 2^n - 2,$$

所以  $U_n = (3n - 1) \times 2^{n+1} + 2$ .

19.

(1) 证明:  $\because AD \parallel BC, AB \perp BC, AB = BC = 1, AD = 2$ .

$\therefore AC = \sqrt{2}, CD = \sqrt{2}, AC^2 + CD^2 = AD^2, \therefore AC \perp CD$

$\because PD \perp$  平面  $ABCD, AC \subset$  平面  $ABCD, \therefore PD \perp AC$ . 又  $CD \cap PD = D$

$\therefore AC \perp$  平面  $PCD$ , 又  $AC \subset$  平面  $PAC, \therefore$  平面  $PAC \perp$  平面  $PCD$ .

(2) 以  $AB, AD$  为  $x, y$  轴, 过  $A$  平行  $DP$  的直线为  $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $A-xyz$ ,

则  $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 2, 0), P(0, 2, 1)$ ,

$\overrightarrow{AP} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ , 设平面  $PAB$  的一个法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

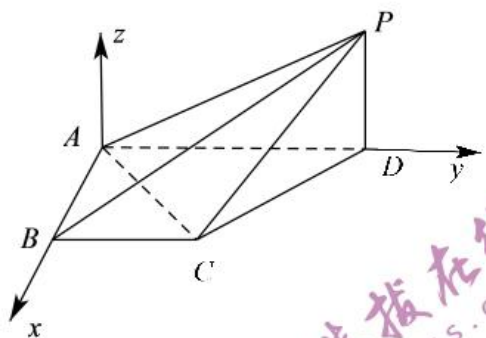
$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 2y + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = x = 0 \end{cases}, \text{取 } y = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (0, 1, -2),$$

由 (1) 知平面  $PCD$  的一个法向量为  $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ ,



$$\cos \langle \overrightarrow{AC}, \vec{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{AC}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

由图可得平面  $PAB$  与平面  $PCD$  所成锐二面角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .



20.

(I) 这 600 辆车在 9:20~10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为:

$$(30 \times 0.005 + 50 \times 0.015 + 70 \times 0.020 + 90 \times 0.010) \times 20 = 64, \text{ 即 } 10:04$$

(II) 由频率分布直方图和分层抽样的方法可知, 抽取的 10 辆车中, 在 10:00 前通过的车辆数就是位于时间分组中在 20, 60 这一区间内的车辆数,

$$\text{即 } (0.005 + 0.015) \times 20 \times 10 = 4,$$

所以  $X$  的可能的取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}, \quad P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{35}, \quad P(X=4) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}.$$

所以  $X$  的分布列为:

$X$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

(III) 由 (1) 得  $\mu = 64$ ,

$$\sigma_{\text{车辆}}^2 = (30 - 64)^2 \times 0.1 + (50 - 64)^2 \times 0.3 + (70 - 64)^2 \times 0.4 + (90 - 64)^2 \times 0.2 = 324$$





所以  $\sigma = 18$ ,

估计在 9:46~10:40 之间通过的车辆数也就是在 46, 100 通过的车辆数,

由  $T \sim N(64, 18^2)$ , 得

$$P(64-18 \leq T \leq 64+2 \times 18) = \frac{P(\mu-\sigma < T \leq \mu+\sigma)}{2} + \frac{P(\mu-2\sigma < T \leq \mu+2\sigma)}{2} = 0.8186,$$

所以估计在在 9:46~10:40 之间通过的车辆数为  $1000 \times 0.8186 \approx 819$ .

21.

(1) 设  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 则  $Q(-1, y)$ ,

可得  $\overline{QP} = (x+1, 0)$ ,  $\overline{QF} = (2, -y)$ ,

$\overline{FP} = (x-1, y)$ ,  $\overline{FQ} = (-2, y)$ ,

$\therefore \overline{QP} \cdot \overline{QF} = \overline{FP} \cdot \overline{FQ}$ ,

$\therefore (x+1) \cdot 2 = (x-1) \cdot (-2) + y^2$ , 化简得  $y^2 = 4x$ ,

即动点  $P$  的轨迹  $C$  的方程为:  $y^2 = 4x$ ;

(2) 设直线  $l$  的方程为  $x = ty + m$ ,

过点  $M(m, 0)$  ( $m > 0$ ) 的直线  $l$  与曲线  $C$  的交点为  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + m \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 - 4ty - 4m = 0 \quad (*),$$

则  $y_1, y_2$  是方程  $(*)$  的两根,

$$\therefore \Delta = 16(t^2 + m) > 0, \text{ 且 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 4t \\ y_1 y_2 = -4m \end{cases}, \quad \textcircled{1}$$

又  $\therefore \overline{FA} = (x_1 - 1, y_1)$ ,  $\overline{FB} = (x_2 - 1, y_2)$ ,

由  $\overline{FA} \cdot \overline{FB} < 0$ , 可得  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 < 0$ ,

即  $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + y_1 y_2 < 0$ ,  $\textcircled{2}$

由于  $x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4}$ , 代入不等式  $\textcircled{2}$  可得:



$$\frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} + y_1 y_2 - \left( \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} \right) + 1 < 0,$$

$$\text{化简得: } \frac{(y_1 y_2)^2}{16} + y_1 y_2 - \frac{1}{4} [(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2] + 1 < 0, \quad \textcircled{3}$$

$$\text{由}\textcircled{1}\text{式, 化简不等式}\textcircled{3}\text{得 } m^2 - 6m + 1 < 4t^2, \quad \textcircled{4}$$

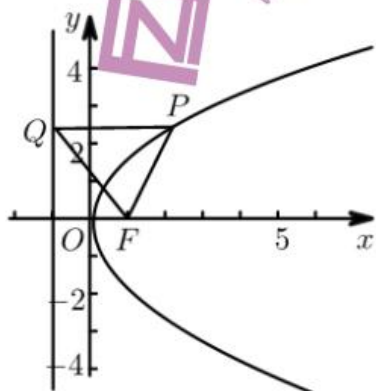
对任意实数  $t$ , 不等式  $4t^2 \geq 0$  恒成立,

$\therefore$  不等式  $\textcircled{4}$  对于一切  $t$  恒成立等价于  $m^2 - 6m + 1 < 0$ ,

$$\text{解之得 } 3 - 2\sqrt{2} < m < 3 + 2\sqrt{2},$$

由此可得: 存在正数  $m$ , 对于过点  $M(m, 0)$ , 且与曲线  $C$  有两个交点  $A, B$  的任一直线, 都有

$\overline{FA} \cdot \overline{FB} < 0$  且  $m$  的取值范围是  $(3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ .



22.

$$(1) \text{ 函数 } f(x) \text{ 的定义域是 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{a}{x} + 1 = \frac{a+x}{x},$$

当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

故函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $a < 0$  时,  $-a > 0$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < -a$ ;

令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > -a$ ,

故函数  $f(x)$  在  $(0, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, +\infty)$  上单调递增.



(2) 证明: 要证明  $f(x) < x + \frac{e^x}{x}$ ,

即证  $\frac{e^x}{x} > a(\ln x + 2)$ , 即证  $\frac{e^x}{x^2} > \frac{a(\ln x + 2)}{x}$ .

设  $g(x) = \frac{e^x}{x^2} (x > 0)$ , 则  $g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$ ,

当  $0 < x < 2$  时,  $g'(x) < 0$ ;

当  $x > 2$  时,  $g'(x) > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, 2)$  上单调递减, 在  $(2, +\infty)$  上单调递增,

所以  $x = 2$  是  $g(x)$  的极小值点, 也是最小值点,

且  $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^2}{4}$

令  $h(x) = \frac{a(\ln x + 2)}{x} (x > 0)$ ,

则  $h'(x) = -\frac{a(\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{a(\ln x - \ln e^{-1})}{x^2}$

当  $0 < x < e^{-1}$  时,  $h'(x) > 0$ ;

当  $x > e^{-1}$  时,  $h'(x) < 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $(0, e^{-1})$  上单调递增, 在  $(e^{-1}, +\infty)$  上单调递减,

所以  $x = e^{-1}$  是  $h(x)$  的极大值点, 也是最大值点, 且  $h(x)_{\max} = h(e^{-1}) = ae$ ,

所以  $h(x) \leq ae < \frac{e}{4} \cdot e = \frac{e^2}{4} \leq g(x)$ ,

故  $f(x) < x + \frac{e^x}{x}$  成立.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》