辽宁省十校联合体 2024 届高三毕业生八月调研考试

数　学　试　题　　参考答案与解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题仅有一个选项符合题意）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	D	D	B	C	A	C

二、选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。每小题有至少一个选项符合题意，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ACD	AC

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案填在答题卡上）

题号	13	14
答案	2020	0.44（0.43-0.45 均可）
题号	15	16
答案	$\frac{\sqrt{(ap+bq+cr)(-ap+bq+cr)(ap-bq+cr)(ap+bq-cr)}}{24V}$	1015

部分小题解析：

6. 设 $z=1-u-v$.则$|u(e_1-e_3)+v(e_2-e_3)+e_3|^2=u^2+v^2+z^2-wv-uz-zv$

$$=\frac{1}{2}((u-v)^2+(v-z)^2+(z-u)^2)\geq\frac{1}{2}((u-v)^2+(v-z)^2)=\frac{(3v-1)^2}{4}$$

$\geq\frac{1}{16}$,当且仅当 $v=\frac{1}{2},z=u=\frac{1}{4}$时，上式等号成立.

故$|u(e_1-e_3)+v(e_2-e_3)+e_3|$的最小值为 $\frac{1}{4}$.

7. 由题意，从左下方沿数阵的对角线斜向上组成的数列均为公差为 d_2-d_1的等差数列，这很容易就能证明. 因此，从第 n 行第 1 列的数开始，沿数阵的对角线斜向上组成的数列的所有项(n 项)之和为

$$\frac{1}{2}n[a_0+(n-1)d_1+a_0+(n-1)d_2]=na_0+\frac{n(n-1)}{2}(d_1+d_2).$$

整个数阵所有数的总和

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[a_0+(i-1)d_1+(j-1)d_2]$

$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i-1)d_1+\sum_{j=1}^{n}[a_0+(j-1)d_2]\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[n(i-1)d_1+na_0+\frac{n(n-1)}{2}d_2\right]$

$=n\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+\frac{n-1}{2}d_2+(i-1)d_1\right]=n\left[n\left(a_0+\frac{n-1}{2}d_2\right)+\frac{n(n-1)}{2}d_1\right]$

$=n\left[na_0+\frac{n(n-1)}{2}(d_1+d_2)\right].$

8. 对 $n=0,1\ldots15$，用a_n表示该游客恰有 n 天通过道路 AB 或 CD 的概率， b_n表示该游客恰有 n 天通过道路 BC 或 DA 的概率.考虑函数

$f(x)=x\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{1}{29}x+\frac{28}{29}\right),$

$g(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{30}x+\frac{29}{30}\right)$.据条件，知$a_n$为 f(x)的 n 次项系数， b_n为 g(x)的 n 次项系数.第 30 天结束时，游客住在村庄 B 当且仅当他通过道路 AB 或 CD 的总天数为奇数，且通过道路 BC 或 DA 的总天数为偶数.于是，这样的情况发生的概率为

$p=(a_1+a_3+\cdots+a_{15})(b_0+b_2+\cdots+b_{14})$

$=\frac{f(1)-f(-1)}{2}\cdot\frac{g(1)+g(-1)}{2}$.注意到 f(1)=1. $f(-1)=-1\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{27}{29}=-\frac{1}{29}$,

g(1)=1.g(-1)=0.故 $p=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{29}\right)\frac{1}{2}=\frac{15}{58}$.

11. A: 设 $P(2pt^2,2pt),G(2pu^2,2pu)$ 因 $A(0,0)$, 由 $AP^2=AG^2$ 得 $4p^2(t^4+t^2)=4p^2(u^4+u^2)$,

$(t^2-u^2)(t^2+u^2+1)=0$ 因 $t^2+u^2+1>0,t\neq u$,故知 $t+u=0,u=-t,G(2pt^2,-2pt)$

即 P，G 为Γ上的对称点，AN 为 PG 边上的高.设 PN=l,则 $AN=\sqrt{3}l$, $P(\sqrt{3}l,l)$. 又由 P 在抛物线 $y^2=2px$ 上，故 $l^2=2p\cdot\sqrt{3}l,l=2\sqrt{3}p$(舍去 0 根) $AN=\sqrt{3}l=6p$, A 正确。

B：设 $Q(2pt^2,2pt),Q'(2pu^2,2pu)$,则 $x_T=2ptu,x_K=-\frac{p}{2},KT=|2ptu-\frac{p}{2}|$.

由 Q,Q',，N 共直线得 $2p(t-u)x_N+4p^2tu(t-u)=0$

$x_N=-2ptu$，$FN=|x_N-x_F|=|-2ptu+\frac{p}{2}|=KT$，B 错误。

C:设 $P(2pt^2,2pt),P'(2pt'^2,2pt'),Q(2pu^2,2pu),Q'(2pu'^2,2pu')$,

$R(2pv^2,2pv),R'(2pv'^2,2pv')$.由 F,P,P'共直线得

$t-t'+4tt'(t-t')=0$ 因 $t-t'\neq0$,故 $1+4tt'=0,t'=-\frac{1}{4t}$.同理 $u'=-\frac{1}{4u},v'=-\frac{1}{4v}$.

$S_{PQR}=2p^2|t^2(u-v)+u^2(v-t)+v^2(t-u)|$

同理 $S_{P'Q'R'}=2p^2|t'^2(u'-v')+u'^2(v'-u')+v'^2(t'-u')|$

$=2p^3|\frac{1}{16t^2}\left(\frac{-1}{4u}-\frac{-1}{4v}\right)+\frac{1}{16u^2}\left(\frac{-1}{4v}-\frac{-1}{4t}\right)+\frac{1}{16t^2}\left(\frac{-1}{4t}-\frac{-1}{4u}\right)|$

$= \frac{p^2}{32t^2u^2v^2}|uv(u-v)+vt(v-t)+tu(t-u)|$

易见二式最后两绝对值相等，故 $\frac{S_{PQR}}{S_{P'Q'R'}} = 64t^2u^2v^2 = |\frac{t}{\frac{-1}{4t}} \cdot \frac{u}{\frac{-1}{4u}} \cdot \frac{v}{\frac{-1}{4v}}| = |\frac{t}{t'} \cdot \frac{u}{u'} \cdot \frac{v}{v'}| = |\frac{y_P y_Q y_R}{y_{P'} y_{Q'} y_{R'}}|$

C 正确。

D：设 $R(2pu^2,2pu), R'(2pu'^2,2pu')$, $Q(2pt^2,2pt), Q'(2pt'^2,2pt')$.则直线 RR'

$-x+(u+u')y = 2puu'$过 Q 的切线 2ty = x+2pt²

解得交点 T $y_T = \frac{2p(uu'-t^2)}{u+u'-2t}$ $y_T - y_R = \frac{2p(uu'-t^2)}{u+u'-2t} - 2pu = \frac{-2p}{u+u'-2t}(t-u)_T^2$

同理 $y_{T'} - y_{R'} = \frac{-2p}{u'+u-2t'}(t'-u')^2$由两共直线线段 $RT = R'T'$知

$y_T - y_R = y_{R'} - y_{T'}$, $(y_T - y_R) + (y_{T'} - y_{R'}) := 0$

从而(t-u)²$(u+u'-2t') + (t'-u')^2(u+u'-2t) = 0(1)$

又直线 QQ' $-x+(t+t')y = 2ptt'$，与直线 RR'方程联立解得交点 M

$y_M = \frac{2p(uu'-tt')}{u+u'-t-t'}$要证共直线的线段 $RM = R'M$,只要证 $y_R + y_{R'} = 2y_M$.即证

$2pu + 2pu' = 2 \cdot \frac{2p(uu'-tt')}{u+u'-t-t'}$

即证 $(u+u')^2 - (u+u')(t+t') = 2uu' - 2tt'$即证 $u^2+u'^2 - (u+u')(t+t') = -2tt'$

即证 $(u+u'-2t')t + (ut'+u't'-u^2-u'^2) = 0(2)$

把已证的式(1)的左边写成 t 的方程

$(u+u'-2t')t^2 + (-2u^2-2uu'-2t'^2-2u'^2+4t'u+4t'u')t+ [u^2(u+u'-2t')+(u+u')(t'-u')^2] = 0$

证其左边有式(2)左边为其因式，得

$[(u+u'-2t')t + (ut'+u't'-u^2-u'^2)][t+(-u-u'+t')] = 0$ 但 $t+t'-u-u' \neq 0$(否

则从 $y_M = \frac{2p(uu'-tt')}{u+u'-t-t'}$知不存在交点 M)，从而式(2)成立.D 正确。

故选 ACD。

12. 由于切点处的半径垂直于切点处的切平面，因此切平面π_0的一个法向量是 $m = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,平面α的一个法向量是 n=(0,0,1). 因为交线 l_0同时在π_0和α内,所以 $m \perp l_0$且 $n \perp l_0$,设 l_0的方向向量为 $\vec{\ell} = (x',y',z')$,则 $\begin{cases} m \cdot \vec{\ell} = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' = 0, \\ n \cdot \vec{\ell} = z' = 0, \end{cases}$取 $\vec{\ell} = (\sqrt{2},-1,0)$,A 选项正确.为了确定交线 l_0的位置， 我们需要知道 l_0上其中一个点的坐标. 根据情景，我们可以试图求平面 POz 截直线 l_0得到的点 Q 的坐标.方便起见,设 $P(x_0,y_0,z_0)$.在平面 POz 内,过点 P 作

PH⊥OQ 于点 H,则 $\overrightarrow{OH}=(x_0,y_0,0)$, $|OH|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.由于 $\overrightarrow{OH}$与 $\overrightarrow{OQ}$共线,因此要求点 Q 的坐标,只需求|OQ|.由 Rt△OHP~Rt△OPQ 得 $\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OP|}{|OQ|}$,从而 $|OQ|=\frac{|OP|^2}{|OH|}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$,因此

$$\overrightarrow{OQ}=|OQ|\cdot\frac{\overrightarrow{OH}}{|OH|}=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},0\right)=\left(\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2},0\right),$$

即 $Q\left(\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2},0\right)$.方便起见，在 $\begin{cases}m\cdot\vec{\ell}=x_0x'+y_0y'+z_0z'=0,\\ n\cdot\vec{\ell}=z'=0\end{cases}$中取 $\vec{\ell}=(-y_0,x_0,0)$.容易知道，直线 Ax+By+C=0 的其中一个方向向量是(-B,A). 因此,设 l_0的一般式方程为 $xx_0x+y_0y+C=0$,代入点 Q 的坐标得 $y_0\cdot\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}+x_0\cdot\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}+C=0$,解得 C=-1，因此 l_0的方程为 $\frac{1}{\sqrt{6}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y-1=0$,即 $x+\sqrt{2}y-\sqrt{6}=0$,B 选项错误.

显然 l'与球 O 相切，所有的 l'组成双锥面，双锥面与平面α的交线即为圆Γ.由于$\Gamma\cap l_0=\varnothing$,因此圆Γ与直线 l_0相离. 临界条件下，Γ与 l_0相切，Γ的半径长即为|OQ|，不过还没证明 $OQ\perp l_0$，下面进行证明.(直接用向量数量积为 0 即可证明,不过不够本质)因为 $OP\perp\pi_0$, $l_0\subset\pi_0$,所以 $l_0\perp OP$. 因为 $Oz\perp\alpha$, $l_0\subset\alpha$,所以 $l_0\perp Oz$.因为 OP∩Oz=O,所以 $l_0\perp$平面 POz.因为 OQ⊂平面 POz,所以 $OQ\perp l_0$得证.因此当Γ与 l_0相切时,切点即为点 Q,此时 PQ 与 z 轴的交点正是点 N 最低的位置 $N_0(0,0,h_0)$. 由 Rt△OHP~Rt△N_0OQ 得 $\frac{|OH|}{|ON_0|}=\frac{|PH|}{|OQ|}$,从而得到 $h_0=|ON_0|=\frac{|OH||OQ|}{|PH|}=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}}{z_0}=\frac{1}{z_0}=\sqrt{2}$,因此 $h>h_0=\sqrt{2}$,C 选项正确.

根据上面的分析得知， $d_\ell=|OQ|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.根据对称性得知， $d_m=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $d_n=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.点 P(x,y,z)在半径为 1 的球 O 的面上,有 $x^2+y^2+z^2=1$.显然有：$x^2<1,y^2<1,z^2<1$,故

$$d_td_md_n=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-y^2)(1-x^2)}}\geq\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-z^2+1-y^2+1-z^2}{3}\right)^3}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3},$$

当且仅当 $1-z^2=1-y^2=1-x^2$,即 $|x|=|y|=|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$时，等号成立.但 $\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3>\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$,D 选项错误.

13. 先证明对于任意 $x,y\in[1,2021]$, 均有 $|f(x)-f(y)|\leqslant 2020$. 若 $|x-y|\leqslant 1010$, 则 $|f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|\leqslant 2020$; 若 $|x-y|>1010$, 不妨假设 $1\leqslant x<y\leqslant 2021$, 则

$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(1)+f(2021)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(1)|+|f(2021)-f(y)|\leqslant 2|x-1|+2|2021-y|=2(x-1)+2(2021-y)=2\times2020-2(y-x)<2\times2020-2\times1010=2020$,

因此，对于任意 $x,y\in[1,2021]$, 均有 $|f(x)-f(y)|\leqslant 2020$.

再证 $m=2020$ 是最小的.

设函数 $f(x)=2|x-1011|$，则函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(2021)=2020$.

对于任意不等的实数 $x, y\in[1, 2021]$，不妨假设 $1\leqslant x<y\leqslant 2021$，则 $|f(x)-f(y)|=2$

$|x-1011|-|y-1011|\leqslant 2|(x-1011)-(y-1011)|=2|x-y|$，因此 $f(x)=2|x-1011|$ 是满足已知条件的函数. 取 $x=1, y=1011$，则 $m\geqslant|f(1)-f(1011)|=|2020-0|=2020$.

综上可得，实数 m 的最小值为 2020

14. 由 $\sin A=\cos B$，得$A=\frac{\pi}{2}\pm B$，由题意可知，$\tan C$存在，所以$C\neq\frac{\pi}{2}$，即$A+B\neq\frac{\pi}{2}$，所以

$A=\frac{\pi}{2}+B$，所以 $2A+C=2A+(\pi-A-B)=2A+\left[\pi-A-\left(A-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3\pi}{2}$.

由 $\sin A=\tan C=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-2A\right)=\frac{\cos 2A}{\sin 2A}$，得 $1=\sin A\cdot\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\frac{2\sin^2 A\cos A}{2\cos^2 A-1}=\frac{2(1-\cos^2 A)\cos A}{2\cos^2 A-1}$，

故 $2\cos^3 A+2\cos^2 A-2\cos A-1=0$，令 $\cos A=x(-1<x<0)$，则$f(x)=2x^3+2x^2-2x-1(-1<x<0)$，$f'(x)=6x^2+4x-2=2(3x-1)(x+1)$，

当$x<-1$时，$f'(x)>0$；当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$；

所以函数$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减，

令 f(x)=0,则 x≈-0.403≈-0.40 所以 $\cos A\approx-0.40$，$\sin A\approx 0.916$，

$\cos B\approx 0.916$，$\sin B\approx 0.40$，$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B\approx 0.44$，答案为 0.44（0.43~0.45 均可）.

15. 设二面角 C-AB-D 的平面角是α,△ABC 的外接圆半径是 R_1,△ABD 的外接圆半径是 R_2，则∠O_1EO_1=α。因为∠EO_1O=∠EO_2O=90°,所以点 E、O_1、O_2、O 共圆，

EO 是该圆的半径,所以 $EO=\frac{O_1O_2}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{EO_1^2+EO_2^2-2\cdot EO_1\cdot EO_2\cdot\cos\alpha}}{\sin\alpha}$由此得到

$R=AO=\sqrt{AE^2+EO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{EO_1^2+EO_2^2-2\cdot EO_1\cdot EO_2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}$。

又因为 $EO_1=R_1\cos ACB=\frac{a}{2\sin ACB}\cos ACB=\frac{a}{2}\frac{\cos ACB}{\sin ACB}$，

$EO_1=R_2\cos ADB=\frac{a}{2\sin ADB}\cos ACB=\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos ADB}{\sin ADB}$，

所以 $R=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{\cos^2 ACB}{\sin^2 ACB}+\frac{\cos^2 ADB}{\sin^2 ADB}-\frac{2\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}}}{\sin\alpha}.a$。因为 $V=\frac{1}{6}abc\sin BAC\sin BAD\sin\alpha$,

所以 $\sin\alpha=\frac{6V}{abc\sin BAC\sin BAD}$，

因此
$$R=\frac{a^2bc\sin BAC\sin BAD\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{\cos^2 ACB}{\sin^2 ACB}+\frac{\cos^2 ADB}{\sin^2 ADB}-\frac{2\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}}}{6V}。$$

现在来计算 $\sin^2BAC\sin^2BAD\left(\sin^2\alpha+\frac{\cos^2ACB}{\sin^2ACB}+\frac{\cos^2ADB}{\sin^2ADB}-\frac{2\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}\right)$。

因为 $\cos\alpha=\frac{\cos CAD-\cos BAC\cos BAD}{\sin BAC\sin BAD}$,

所以 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2BAC-\cos^2BAD-\cos^2CAD+2\cos BAC\cos BAD\cos CAD}{\sin^2BAC\sin^2BAD}$,

因此得到$\sin^2BAC\sin^2BAD\sin^2\alpha=1-\cos^2BAC-\cos^2BAD-\cos^2CAD+2\cos BAC\cos BAD\cos CAD$。

另外

$$\sin^2BAC\sin^2BAD\frac{\cos^2ACB}{\sin^2ACB}=\frac{r^2}{a^2}\cos^2ACB\sin^2BAD,$$
$$\sin^2BAC\sin^2BAD\frac{\cos^2ADB}{\sin^2ADB}=\frac{q^2}{a^2}\cos^2ADB\sin^2BAC$$

$\sin^2BAC\sin^2BAD\frac{\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}$

$=\frac{qr}{a^2}\sin BAC\sin BAD\cos ACB\cos ADB\frac{\cos CAD-\cos BAC\cos BAD}{\sin BAC\sin BAD}$

$=\frac{qr}{a^2}\cos ACB\cos ADB(\cos CAD-\cos BAC\cos BAD)$,

所以

$\sin^2BAC\sin^2BAD\left(\sin^2\alpha+\frac{\cos^2ACB}{\sin^2ACB}+\frac{\cos^2ADB}{\sin^2ADB}-\frac{2\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}\right)$

$=1-\cos^2BAC-\cos^2BAD-\cos^2CAD+2\cos BAC\cos BAD\cos CAD$

$+\frac{r^2}{a^2}\cos^2ACB\sin^2BAD+\frac{q^2}{a^2}\cos^2ADB\sin^2BAC$

$-2\frac{qr}{a^2}\cos ACB\cos ADB(\cos CAD-\cos BAC\cos BAD)$。

把 $\cos BAC=\frac{a^2+b^2-r^2}{2ab},\cos BAD=\frac{a^2+c^2-q^2}{2ac},\cos CAD=\frac{b^2+c^2-p^2}{2bc},\cos ACB=\frac{b^2+r^2-a^2}{2br},\cos ADB=\frac{c^2+q^2-a^2}{2cq}$,

$\sin^2BAC=\frac{2a^2b^2+2a^2r^2+2b^2r^2-a^4-b^4-r^4}{4a^2b^2}$ $\sin^2BAD=\frac{2a^2c^2+2a^2q^2+2c^2q^2-a^4-c^4-q^4}{4a^2c^2}$

代入上式进行化简， 最后得到

$\sin^2BAC\sin^2BAD\left(\sin^2\alpha+\frac{\cos^2ACB}{\sin^2ACB}+\frac{\cos^2ADB}{\sin^2ADB}-\frac{2\cos ACB\cos ADB\cos\alpha}{\sin ACB\sin ADB}\right)$

$$=\frac{(ap+bq+cr)(-ap+bq+cr)(ap-bq+cr)(ap+bq-cr)}{16a^4b^2c^2},$$

所以

$$R=\frac{\sqrt{(ap+bq+cr)(-ap+bq+cr)(ap-bq+cr)(ap+bq-cr)}}{24V}。$$

16. 先求有多少个排布方案， 满足至少有 1 堆人讨论。可以枚举有 i 堆人讨论， 这样放置的方案数是 C_{n-3i}^{i}

证明：首先， 对于每一种方案， 有 n- 4i 个没有被选中的位置。

我们可以考虑枚举这些没有被选中的位置。把每一个讨论的组看成一个整体， 缩成一个点。这样就有 n-3i 个点了。

对于所有 n-3i 个点， 如果被选中，成为一个讨论的组， 那么这个点就要被展开代表 4 个人。否则就代表一个人。我们直接从这 n- 3i 个点中选取 n-4i 个点作为没有被选为组的点。

这样方案数就是 $C_{n-3i}^{n-4i}=C_{n-3i}^{i}$

显然这样的枚举对应的方案是唯一的 (可以把这些选为组的点展开， 再顺序标号)。

然后这么多位置已经固定了，怎么计算剩余不讨论的人的排列数呢?

可能有些排列会有不只 i 个人讨论！所以我们考虑，枚举有 $i\sim\frac{n}{4}$组人讨论。这样就可以排除干扰，一对剩下的乱排列了。设初始 4 个数最小值为 mini

答案 ans= $\sum_{i=1}^{\mathrm{mini}}(-1)^{i-1}\cdot C_{n-3i}^{i}$ ·[剩余 n-4i 个数的排列个数]

证明：发现枚举至少一组的时候，对于一种可行的方案(这里代指枚举方案) 会算 2 次至少两组的贡献，算 3 次至少三组的贡献。

枚举至少两组的时候，会算 3 次至少三组的贡献，算 6 次至少四组的贡献。

枚举至少 i 组的时候， 会算 C_j^i次至少 j 组的贡献(j≥i)所以我们可以通过 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i=1$ 来算出单个的贡献。这可以通过二项式展开来证明。

所以答案 ans= $\sum_{i=1}^{\mathrm{mini}}(-1)^{i-1}\cdot C_{n-3i}^{i}$ ·[剩余 n-4i 个数的排列个数]

设喜欢 4 种爱好的人初始有 x_1,x_2,x_3,x_4个这时候分别还剩下 x_1-i,x_2-i,x_3-i,x_4-i 个人

相当于求有重复元素的排列！我们知道， 如果 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$

那么排列答案就是 $\frac{(n-4i)!}{(x_1-i)!(x_2-i)!(x_3-i)!(x_4-i)!}$如果 $x_1+x_2+x_3+x_4<n$,答案就是 0。

如果 $x_1+x_2+x_3+x_4>n$ 呢？ 考虑枚举+排列。

$$ans=\sum_{a\le x_1-i,b\le x_2-i,c\le x_3-i,d\le x_4-i}[a+b+c+d=n-4i]\frac{(n-4i)!}{a!b!c!d!}$$

$$=(n-4i)!\sum_{a\le x_1-i,b\le x_2-i,c\le x_3-i,d\le x_4-i}[a+b+c+d=n-4i]\frac{1}{a!}\frac{1}{b!}\frac{1}{c!}\frac{1}{d!}$$

我们前面还要用所有排列的个数减去答案，所以真正的答案其实就是

ans= $\sum_{i=1}^{\mathrm{mini}}(-1)^{i-1}\cdot C_{n-3i}^{i}$ ·[剩余 n-4i 个数的排列个数]

代入数据解得方案数为 1015.

四、解答题（本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10分）

已知 H 为锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，AD、BE、CF 为三角形的三条高线，且满足 $9HD\cdot HE\cdot HF=HA\cdot HB\cdot HC$.

（1） 求 $\cos A\cos B\cos C$ 的值.

（2） 求 $\cos\angle CAB\cdot\cos\angle CBA$ 的取值范围.

（1）记△ABC的三个内角为A、B、C.

注意到，cos B·cos A+sin A·sin B=cos(B-A)≤1.

由题意结合几何关系得 $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{1}{9}$

（2）

$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$ =cos A·cos B·(sin A·sin B-cos A·cos B)

≤cos A·cos B·(1-2cosA·cos B).

故 $\frac{1}{6}\le\cos A\cdot\cos B\le\frac{1}{3}$.

当 $\cos A=\cos B=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 时，cos A·cos B 取得最小值；

当 $\cos A=\cos B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，cos A·cos B 取得最大值.

因此，所求范围是 $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$.

18.（12分）

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1$,点 M,N 满足 $AM=\lambda AB_1,CN=\mu CA_1$ 且 $MN\perp AB_1,MN\perp A_1C$.设 $\angle BAC=\theta\ (0<\theta<\pi)$.

（1）证明：$\lambda+\mu=1$；

（2）当θ变化时，是否存在 $MN_1\perp BC_1$？若存在，求θ；若不存在，说明理由.

解：(1)以A为原点，AB所在直线为x轴，垂直于AB的直线为y轴，AA_1所在直线为z轴，

则 $B_1(1,0,1),C(\cos\theta,\sin\theta,0),A_1(0,0,1),M(\lambda,0,\lambda)$

因此 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1),\overrightarrow{CA_1}=(-\cos\theta,-\sin\theta,1),\overrightarrow{CN}=(-\mu\cos\theta,-\mu\sin\theta,\mu)$,

则 $\overrightarrow{MN}=(\cos\theta-\mu\cos\theta,\sin\theta-\mu\sin\theta,\mu-\lambda)$,

由题 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\cos\theta-\mu\cos\theta-\lambda+\mu-\lambda=0$,

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\mu-1+\lambda\cos\theta+\mu-\lambda=0$,

两式相减，得λ+μ=1.

(2)代入λ+μ=1,则

λcosθ-λ+1-2λ=0 因此 $\lambda=\frac{1}{3-\cos\theta},\mu=\frac{2-\cos\theta}{3-\cos\theta}$,

因此有

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\cos^2\theta-\cos\theta-\mu\cos\theta+\mu\cos\theta-\lambda\cos\theta+\lambda+\sin^2\theta-\mu\sin^2\theta-\mu+\lambda$$

$$=1-2\lambda\cos\theta+2\lambda-2\mu=1-\frac{2\cos\theta}{3-\cos\theta}+\frac{2-4+2\cos\theta}{3-\cos\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{3-\cos\theta}$$

由于 $0<\theta<\pi,\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1C}$不为 0,因此不存在 $MN\perp BC_1$.

19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_{n-1}+\dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}(n\ge 3)$，且$a_1=a_2=1$

（1） 求数列$\{a_n\}$的通项公式。

（2） 设$f(x)=1-e^{-x}(1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+...+\dfrac{1}{n!}x^n)(x\ge 0,n\in N^*)$，其中 e 是自然对数的底数，求证：$0\le f(x)<\dfrac{x^{n+1}}{(n-1)!}$

（3） 设S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，实际上，数列$\{S_n\}$存在"极限"，即为：存在一个确定的实数 S，使得对任意正实数 u 都存在正整数 m 满足当 $n\ge m$ 时，$|S_n-S|<u$（可以证明 S 唯一），S 称为数列$\{S_n\}$的极限。试根据以上叙述求出数列的极限 S。

(1)题设递推公式等价于 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}(n\ge 3)$,设 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,则 $b_{n+1}=1+b_n$,

且 $b_1=\frac{a_2}{a_1}=1$,于是 b_n是首项和公差均为 1 的等差数列，即($b_n=n$。当 n≥2 时，累乘可得 ： $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_{n-2}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1=b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1a_1=(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1\times 1=(n-1)!$,而 a_1=1=0!,故 $a_n=(n-1)!$。

(2) ①证明：由 $f(x)=1-e^{-x}\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\right)(x\ge 0 n\in N^*)$,则

$$f'(x)=e^{-x}\left(\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\right)-\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)}x^{n-1}\right)\right)$$
$$=e^{-x}\frac{x^n}{n!},$$

由 $x\ge 0,n\in N^*,f'(x)=e^{-x}\frac{x^n}{n!}\ge 0$,且仅当 x=0 时等号成立

于是 f(x)在[0,+∞)上单调递增,故 f(x)≥f(0)=0。设 $g(x)=f(x)-\frac{x^{n-1}}{(n+1)!}$,则

$g'(x)=f'(x)-\frac{x^n}{n!}=\frac{x^n}{n!}(e^{-x}-1)$,由 $x\geq 0, n\in N^*, e^{-x}-1\leq 0$ 故

$g'(x)\leq 0$,且仅当 x=0 时等号成立,于是 g(x)在[0,+∞)上单调递减,故 g(x)≤g(0)=0。

于是 $0\leq f(x)\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$得证。

②数列 S_n的极限 S=e。

由①知, $0\leq f(x)\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,整理得:

$0\leq e^x-\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\right)\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$。于是对 n≥2,

$0\leq e^x-\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right)\leq \frac{x^n}{n!}e^x$,令 x=1 得:

$0\leq e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)\leq \frac{e}{n!}$。由题意, $S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$,故

$|S_n-e|\leq \frac{e}{n!}$,于是 $|S_n-e|<\frac{3}{n}$,且对 n=1 也成立，于是对任意正实数 u， $\frac{3}{u}$也是一个确定的正实数，于是一定存在一个正整数 m，使得 $m>\frac{3}{u}$,于是当 n≥m 时,

$|S_n-e|<\frac{3}{n}\leq\frac{3}{m}<u$,于是数列 S_n的极限 S=e。

20.（12 分）

某单位有 12000 名职工，通过抽验筛查一种疾病的患者．假设患疾病的人在当地人群中的比例为 p（$0<p<1$）．专家建议随机地按 k（$k>1$ 且为 12000 的正因数）人一组分组，然后将各组 k 个人的血样混合再化验．如果混管血样呈阴性，说明这 k 个人全部阴性；如果混管血样呈阳性，说明其中至少有一人的血样呈阳性，就需要对每个人再分别化验一次．设该种方法需要化验的总次数为 X.

（1） 当 $E(X)\geq 12000$ 时，求 p 的取值范围并解释其实际意义；

（2） 现对混管血样逐一化验，至化验出阳性样本时停止，最多化验 R 次．记 W 为混管的化验次数，当 R 足够大时，证明：$E(W)<\frac{1}{1-(1-p)^k}$ ；

（3） 根据经验预测本次检测时个人患病的概率 p_0，当 $k=6$ 时，按照 p_0 计算得混管数量 Y 的期望 $E(Y)=400$；某次检验中 $Y_0=440$，试判断个人患病的概率为 p_0 是否合理。[如果 $2P(Y\geq Y_0)<0.05$，则说明假设不合理].

附：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 0.6827$， $P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.9545$，$P(|X-\mu|<3\sigma)\approx 0.9973$.

(1)令 $E(X)=\frac{12000}{k}+\frac{12000}{k}\left[1-(1-p)^k\right]\cdot k=12000\left[\frac{1}{k}+1-(1-p)^k\right]\geq 12000$,

可得 $\frac{1}{k}\geq(1-p)^{k}$恒成立，

两边取对数,可得-lnk≥kln(1-p),k>0,

得 $\ln(1-p)\leq-\frac{\ln k}{k}$.不妨设 $f(k)=-\frac{\ln k}{k}$,

则 $f'(x)=\frac{\ln k-1}{k}$,当 k∈(0,e)时,f'(x)<0,k∈(e,+∞)时,f'(x)>0,

因此 f(k)在(0,e)上单调递减,在(e,+∞)上单调递增.

因此， $f(k)\geq f(e)=-\frac{1}{e}$,此时 k=e.

但由于 k 是 12000 的因数,

所以 $f(k)\geq\max\{f(3)\}=\max\{f(4),f(3)\}=f(3)=-\frac{\ln 3}{3}$,

那么 $\ln(1-p)\leq-\frac{\ln 3}{3}$,即 $1-p\leq e^{-\frac{\ln 3}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}$,即 $p\geq1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

实际意义略，合理即可.

(2)n=1,2,3,…,R-1 时, $P(W=n)=(1-p)^{k(n-1)}[1-(1-p)^{k}]$,

n=R 时, $P(W=R)=(1-p)^{k(R-1)}$, $E(W)=\sum_{i=1}^{R}iP(W=i)$,

不妨设 $p'=(1-p)k$

则 $E(W)=(1-p')[1+2p'+3p'^{2}+\cdots(R-1)p'^{R-2}]+Rp'^{R-1}$,

设 $S=1+2p'+3p'^{2}+\cdots(R-1)p'^{R-2}$, $p'S=p'+2p'^{2}+\cdots+(R-1)$p'R-1

两式相减 $l,(1-p')S=1+p'+\cdots+p'^{R-2}-(lR-1)p'^{R-1}$

则 $E(W)=1+p'+\cdots+p'^{R-2}+p'^{R-1}=\frac{1-p'^{R}}{1-p'}<\frac{1}{1-(1-p)^{k}}$

(3)由于 Y 服从二项分布,可以取得的值为 0,1,2,…,2000.

所以 E(Y)=2000p=400,

得 p=0.2,D(Y)=2000p(1-p)=320.同时，由于 2000 足够大，

不妨视 $Y\sim N(400,320)$, $\sigma^{2}=320$, $\sigma=8\sqrt{5}\approx17.9$.

则 2P(Y≥440)=1-P(360≤Y≤440)<1-P(μ-2σ<Y<μ+2σ)

而 P(μ-2σ<Y<μ+2σ)≈0.954,故 2P(Y≥440)<0.046<α,

因此 2P(Y≥440)<0.046<α,

故有充分的里有认为 H_0不合理.

21.（12 分）

已知 $b>0$,曲线 $C_1:x^2=4y$，过点 $M(0,b)$ 的曲线 C_1 的所有弦中，最小弦长为8.

（1）求 b 的值；

（2）过点 M 的直线与曲线 C_1 交于 A、B 两点，曲线 C_1 在 A、B 两点处的两条切线交于点 P，求点 P 的轨迹 C_2；

（3）在（2）的条件下，N 是平面内的动点，动点 Q 是 C_2 上与 N 距离最近的点，满足$|NQ|=|NM|$的动点 N 的轨迹为 C_3；并判断是否存在过 M 的直线 l，使得 l 与 C_1、l 与 C_3 的四个交点的横坐标成等差数列，说明理由。

(1) b=4. (2) x=-4 (3)不存在。

22.（12 分）

设方程 $(x-2)^2e^x=a$ 有三个实数根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 请在以下两个问题中任选一个进行作答，注意选的序号不同，该题得分不同。若选①则该小问满分 4 分，若选②则该小问满分 9 分。

①证明：$(x_1-2)(x_2-2)<4$；

②证明：$x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{3e}{2}$.

(1)由题意,

$f'(x)=x(x-2)e^x,x\in R,$

可知在(-∞,0),(2,+∞)上,有 $f'(x)>0$,在(0,2)上 $f'(x)<0$,

故 f'(x)在(-∞,0)上单调递增,在(0,2)上单调递减,在(2,+∞)单调递增.

易知 f(x)+a≥0,且有 f(0)=4-a,f(2)=-a.

①当 a≤0 时,有 f(x)≥-a≥0,

当且仅当 x=2，a=0 时等号成立，那么 f(x)=0 至多有一个实根，故舍去；

②当 a∈(0,4)时,注意到 $f\left(-\frac{4+4\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}\right)<0,f(0)>0,f(2)<0,f(3)>0,$

而 $-\frac{4+4\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}<0<2<3,$

由零点存在性定理可知，f(x)=0 在 $(-\frac{4+4\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}$,0),(0,2),(2,+∞)_上各有一实根，

那么 f(x)=0 有三个实根，故可取；

③当 a≥4 时,f(0)=4-a≤0,故 x∈(-∞,2)时,f(x)=f(0)≤0.

又 $f(\sqrt{a}+2)=ae^{\sqrt{a}+2}-a=a(e^{\sqrt{a}+2}-1)>0,$

故 f(x)在(-∞，2)上至多有一零点，在(2，+∞)上有一零点，那么 f(x)=0 至多有两个实根，故舍去.综上所述，当且仅当 a∈(0，4)时，满足题意

(2)①由(1)得,$x_1<0<x_2<2<x_3<3$,则 $x_1-2<-2<x_2-2<0$.

设 $l_1=x_1-2,l_2=x_2-2$,l 故 $t_1<-2<t_2<0$,不妨设 $k=\frac{t_1}{t_2}>1$ 而 $(x_1-2)^2e^{x_1}=(x_2-2)^2e^{x_2}=a$,故

$t_1^2e^{h}=t_2^2e^{h}=\frac{a}{e^2}>0$.

两边取对数，则 $2\ln(-t_2)+t_2=2\ln(-t_1)+t_1=2\ln(-t_2)+2\ln k+kt_2$得到 $t_2-kt_2=2\ln k$,则

$t_2=\frac{2\ln k}{1-k},t_1=kt_2=\frac{2k\ln k}{1-k}$.则 $t_1t_2=k\left(\frac{2\ln k}{1-k}\right)^2=\left(\sqrt{k}\frac{2\ln k}{1-k}\right)^2=\left(\frac{4\ln\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}}\right)^2$

设 $g(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$,则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leq 0$,

那么 g(x)在(1,+∞)单调递减,即 g(x)<g(1)=0.

又 $\sqrt{k}>1$,则 $2\ln\sqrt{k}-\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}<0$,即 $2\ln\sqrt{k}<\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}$

由于 $\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}>0$,则 $\frac{4\ln\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}}<2$,则 $(x_1-2)(x_2-2)=t_1t_2=\left(\frac{4\ln\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}}\right)^2<4$.

(2) ②

由(1)得,$x_1<0<x_2<2<x_3<3$,则 $x_1-2<-2<x_2-2<0$.

设 $l_1=x_1-2,l_2=x_2-2$,l 故 $t_1<-2<t_2<0$,不妨设 $k=\frac{t_1}{t_2}>1$ 而 $(x_1-2)^2e^{x_1}=(x_2-2)^2e^{x_2}=a$,故

$t_1^2e^{h}=t_2^2e^{h}=\frac{a}{e^2}>0$.

两边取对数，则 $2\ln(-t_2)+t_2=2\ln(-t_1)+t_1=2\ln(-t_2)+2\ln k+kt_2$得到 $t_2-kt_2=2\ln k$,则

$t_2=\frac{2\ln k}{1-k},t_1=kt_2=\frac{2k\ln k}{1-k}$.则 $t_1t_2=k\left(\frac{2\ln k}{1-k}\right)^2=\left(\sqrt{k}\frac{2\ln k}{1-k}\right)^2=\left(\frac{4\ln\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}}\right)^2$

设 $g(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$,则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leq 0$,

那么 g(x)在(1,+∞)单调递减,即 g(x)<g(1)=0.

又 $\sqrt{k}>1$,则 $2\ln\sqrt{k}-\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}<0$,即 $2\ln\sqrt{k}<\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}$

1.5e>4,只需证题设式子小于 4 即可。

$(x_1-2)(m_2-2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<4$.

那么 $x_1x_2<2(x_1+x_2)$,又因为 $x_1<0<x_2<2$,i 故 $x_1x_2<0$,从而 $1>\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$,

那么 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<\frac{1}{2}$.

下证 $x_1+x_2<0$;

法一：$f(-x_2)>f(x_1)=f(x_2)$,

即证 $f(x_2)-f(-x_2)<0,0<x_2<2$.设 $F(x)=f(x)-f(-x)=(x-2)^2e^x-(x+2)^2e^{-x},0<x<2$,那么

$F'(x)=f'(x)-f'(-x)=x(x-2)e^x+x(x+2)e^{-x}$,设 $p(x)=F'(X)$,则 $p'(x)=(x^2-2)(e^x-e^{-x})$,

其中 $e^x-e^{-x}>0$.故 $F'(x)$在$(0,\sqrt{2})$上单调递减，在$(\sqrt{2},2)$上单调递增.而

$F'(\sqrt{2})<F'(0)=0,F'(2)=\frac{8}{e^2}>0$,

故存在唯一一个 $x_0\in(\sqrt{2},2)$,$F'(x_0)=0$,即 $F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,2)$上单调递增,而

$F(0)=0,F(2)=-\frac{16}{e^2}<0$,故 $F(x)<0$ 恒成立,那么，$f(x_2)-f(-x_2)<0$ 即 $f(-x_2)>f(x_2)=f(x_1)$.

而 $f(x)$在$(-\infty,0)$上递增。$x_1<0,-x_2<0$,故 $x_1<-x_2$,即

$x_1+x_2<0$,原题得证.

法二：

欲证 $x_1+x_2<0$,可证 $-t_1-t_2>4$.即证 $\frac{2\ln k}{k-1}+\frac{2k\ln k}{k-1}>4$,

即证 $\frac{k+1}{k-1}\ln k>2$,即 $\ln k+\frac{4}{k+1}>2$.

设 $h(x)=\ln x+\frac{4}{x+1}$,故 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$,

那么 $h(x)$在$(1,+\infty)$上单增,$h(x)>h(1)=2$,故 $\ln k+\frac{4}{k+1}>2$.

则 $-t_1-t_2=\frac{2\ln k}{k-1}+\frac{2k\ln k}{k-1}=\frac{k+1}{k-1}\ln k>4$,故 $x_1+x_2<0$,而 $2<x_3<3$,易知，$x_3+\frac{1}{x_3}<\frac{10}{3}$,

原题得证.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。