

湖北省重点高中智学联盟 2022 年秋季高二年级 12 月联考

参考答案

一、单选题 (每题 5 分, 共 40 分)

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	D	B	C	C	D	C

3. D

【详解】如图, 延长  $MN$  交  $CD$  于  $E$ , 连接  $PE$  交  $DD_1$  于  $H$ , 取  $DC$  的中点  $F$ , 连接  $EM$  与  $FP$ ,

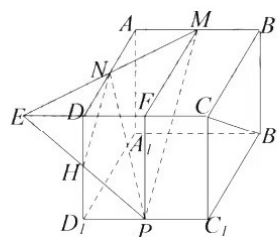
由三角形相似知  $H$  是  $DD_1$  的中点, 连接  $NH$ ,

$\therefore NH$  即为所求的  $l$ ,

由正方体可知  $l \parallel AD_1 \parallel BC_1$ ,

又  $\because$  正方形  $BCC_1B_1$  中  $BC_1 \perp B_1C$ ,  $\therefore l \perp B_1C$ ,

$\therefore l$  与直线  $B_1C$  所成的角为  $90^\circ$ , 故选: D.



5. C

【详解】由题意可知, 动直线  $x + my = 0$  经过定点  $A(0,0)$ ,

动直线  $mx - y - m + 3 = 0$  即  $m(x-1) - y + 3 = 0$ , 经过定点  $B(1,3)$ ,

因为  $1 \times m - m \times 1 = 0$ , 所以动直线  $x + my = 0$  和动直线  $mx - y - m + 3 = 0$  始终垂直,

$P$  又是两条直线的交点,

则有  $PA \perp PB$ ,  $\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$ ,

故  $|PA| \cdot |PB| \leq \frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} = 5$  (当且仅当  $|PA| = |PB| = \sqrt{5}$  时取“=”), 故选: C.

6. A

【详解】对于 A, 圆  $x^2 + (y-a)^2 = 2$  的圆心为  $(0,a)$ , 半径为  $\sqrt{2}$ ,

因为圆  $M: (x-3)^2 + y^2 = 8$  的圆心为  $M(3,0)$ , 半径为  $2\sqrt{2}$ ,

所以要使圆  $M$  与圆  $x^2 + (y-a)^2 = 2$  有公共点, 则只要圆心距的范围为  $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ ,

所以  $\sqrt{2} \leq \sqrt{3^2 + a^2} \leq 3\sqrt{2}$ , 解得  $-3 \leq a \leq 3$ , 所以 A 正确, 故选: A.

对于 B, 由题意可得  $\triangle ABC$  的欧拉线即为  $AB$  的垂直平分线,

因为  $A(1,0)$ ,  $B(-1,2)$ ,

所以  $AB$  的中点坐标为  $(0,1)$ ,  $k_{AB} = \frac{2-0}{-1-1} = -1$ ,

所以线段  $AB$  的垂直平分线方程为  $y = x + 1$ , 即  $x - y + 1 = 0$ ,

因为“欧拉线”与圆  $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2$  相切，

所以  $r = \frac{|3+1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ，所以圆  $M: (x-3)^2 + y^2 = 8$ ，

所以圆  $M$  上的点到原点的最大距离为  $3+2\sqrt{2}$ ，所以 B 错误；

对于 C，因为圆心  $M(3,0)$  到直线  $x-y-1=0$  的距离为  $d = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，而圆的半径为  $2\sqrt{2}$ ，

所以圆  $M$  上存在三个点到直线  $x-y-1=0$  的距离为  $\sqrt{2}$ ，所以 C 错误；

对于 D， $\frac{y}{x+1}$  表示圆上的点  $(x,y)$  与定点  $P(-1,0)$  连线的斜率，

设过  $P(-1,0)$  与圆相切的直线方程为  $y = k(x+1)$ ，即  $kx - y + k = 0$ ，则

$\frac{|3k+k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2\sqrt{2}$ ，解得  $k = \pm 1$ ，所以  $\frac{y}{x+1}$  的最小值为  $-1$ ，所以 D 错误，

7. B

【详解】圆  $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$  的圆心为  $C(5,5)$ ，半径为 4，

直线  $AB$  的方程为  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ ，即  $x + 2y - 4 = 0$ ，

圆心  $C$  到直线  $AB$  的距离为  $\frac{|5+2 \times 5 - 4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} > 4$ ，

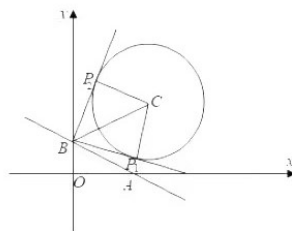
则点  $P$  到直线  $AB$  的距离的最小值为  $\frac{11\sqrt{5}}{5} - 4 < 2$ ，最大值为  $\frac{11\sqrt{5}}{5} + 4 < 10$ ，

所以点  $P$  到直线  $AB$  的距离小于 10，但不一定大于 2，故选项 A 正确，B 错误；

如图所示，当  $\angle ABP$  最大或最小时， $PB$  与圆相切，( $P$  点位于  $P_1$  时  $\angle PBA$  最小，位于  $P_2$  时  $\angle PBA$  最大)，

连接  $CP$ ， $BC$ ，可知  $PC \perp PB$ ， $|BC| = \sqrt{(0-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{34}$ ， $|CP| = 4$ ，

由勾股定理可得  $|BP| = \sqrt{|BC|^2 - |CP|^2} = 3\sqrt{2}$ ，故选项 CD 正确。故选：B。



8. C

【详解】如图：

在椭圆上任意一点  $P$  作平行于  $O_1O_2$  的直线，与球  $O_1$  交于  $F$  点，与球  $O_2$  交于  $E$  点，

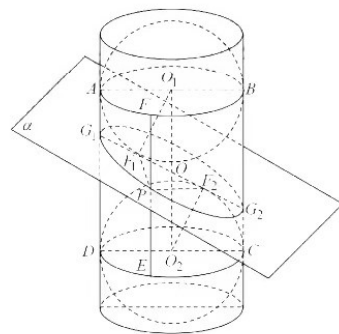
则  $PE$ ， $PF_2$  是过点  $P$  作球  $O_2$  的两条公切线， $PE = PF_2$ ，同理  $PF = PF_1$ ，

$\therefore PF_1 + PF_2 = PE + PF = O_1O_2$ ，是定值，所以  $F_1, F_2$  是椭圆的焦点；①正确；

由以上的推导可知： $O_1O_2 = 2OO_1 = 2a, OO_1 = a$ ， $OF_1 = c$ ，

$\therefore O_1F_1 \perp$  平面  $\alpha$ ， $\therefore O_1F_1 \perp OF_1, \triangle O_1OF_1$  是直角三角形， $O_1F_1^2 + OF_1^2 = OO_1^2$ ，即  $O_1F_1^2 + c^2 = a^2$ ， $\therefore O_1F_1 = b$ ，②

正确；



$\angle F_1 O O_1$  就是平面  $\alpha$  与轴线  $O_1 O_2$  的夹角  $\theta$ ，在  $Rt\Delta O_1 O F_1$  中，椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{O F_1}{O O_1} = \cos \theta$ ，

由余弦函数的性质可知当锐角  $\theta$  变大时， $e$  变小，③错误；故选：C.

二、多选题（每题 5 分，共 20 分，漏选得 2 分，有错选的得零分）

9	10	11	12
ABD	ABD	AC	ABD

三、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13.  $y = \sqrt{3}x + 2$     14.  $\sqrt{21}$     15. 1    16.  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

15. 【答案】1

【详解】易知曲线  $x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|$  关于  $x$  轴和  $y$  轴对称，故只需考虑  $x \geq 0, y \geq 0$  的情形，此时方程为

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y, \text{ 即 } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

所以  $(x, y)$  的轨迹如下图：

$\frac{y}{x-4} = \frac{y-0}{x-4}$ ，表示点  $P(x, y)$  和  $A(4, 0)$  连线  $l$  的斜率，由图可知，当  $l$  曲线第四象限部分半圆（圆心为  $(1, -1)$ ，半径为  $\sqrt{2}$ ）相切时，斜率最大。

设  $l: y = k(x-4)$ ，则  $\frac{|3k-1|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{2}$ ，解得  $k = 1$  或  $-\frac{1}{7}$ （舍去），所以  $\frac{y}{x-2}$  的最大值为 1.

16. 【答案】 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

【详解】联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 2\sqrt{2}y \end{cases}$  得：  $\begin{cases} (8b^2 - a^2)y^2 = a^2b^2 \\ x = 2\sqrt{2}y \end{cases}$

所以  $8b^2 - a^2 > 0, 8c^2 - 9a^2 > 0$ ，解得  $e > \frac{3\sqrt{2}}{4}$

同时有  $y_A = \frac{ab}{\sqrt{8b^2 - a^2}}$ ，所以  $x_A = \frac{2\sqrt{2}ab}{\sqrt{8b^2 - a^2}}$ ，即

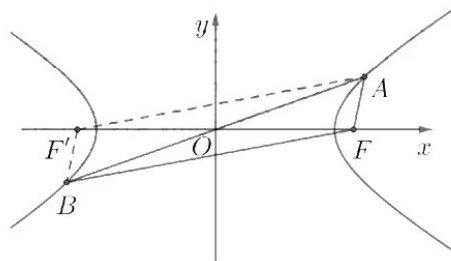
$$A\left(\frac{2\sqrt{2}ab}{\sqrt{8b^2 - a^2}}, \frac{ab}{\sqrt{8b^2 - a^2}}\right)$$

设双曲线的左焦点为  $F'$ ，连结  $AF'$ ， $BF'$ ，由对称性知四边形  $AF'BF$  为平行四边形。

$$\because \angle AFB \geq 90^\circ \therefore \angle F'AF \leq 90^\circ$$

$$\therefore \overrightarrow{F'A} \cdot \overrightarrow{F'A} \geq 0 \Rightarrow (x_A - c)(x_A + c) + y_A^2 \geq 0 \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 \geq c^2$$

$$\Rightarrow \frac{9a^2b^2}{8b^2 - a^2} \geq c^2 \Rightarrow 9a^2(c^2 - a^2) \geq c^2(8c^2 - 9a^2) \Rightarrow 8e^4 - 18e^2 + 9 \leq 0 \Rightarrow 1 < e^2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < e \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 综上得 } \frac{3\sqrt{2}}{4} < e \leq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



四、解答题（共 70 分，第 17 题 10 分，其余各 12 分）

17. (1) 设所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

$\therefore$  两焦点分别为  $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $F_2(\sqrt{2}, 0)$ ,  $\therefore c = \sqrt{2}$

又  $\because$  椭圆过点  $P(1, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ,  $\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{2}{3b^2} = 1$ , 又  $a^2 = b^2 + 2$

$\therefore a^2 = 3, b^2 = 1$ , 所以椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ . .....6 分

(2) 方法一:

(i). 若焦点在  $x$  轴上, 设所求双曲线方程为  $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m, n > 0)$ ,

因为  $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m, n > 0)$  与双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  有相同渐近线,

所以  $\frac{n}{m} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 设该双曲线的焦距为  $2c_1$ ,

又因为焦距  $2c_1 = 2\sqrt{5}$ , 所以  $c_1 = \sqrt{5}$ , 所以  $m^2 + n^2 = c_1^2 = 5$ ,

联立  $\begin{cases} \frac{n}{m} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$ , 解得  $m^2 = 2, n^2 = 3$ , 则双曲线方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ , .....9 分

(ii). 若焦点在  $y$  轴上, 设所求双曲线方程为  $\frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} = 1 (m, n > 0)$ ,

因为  $\frac{y^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} = 1 (m, n > 0)$  与双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  有相同渐近线,

所以  $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 设该双曲线的焦距为  $2c_1$ ,

又因为焦距  $2c_1 = 2\sqrt{5}$ , 所以  $c_1 = \sqrt{5}$ , 所以  $m^2 + n^2 = c_1^2 = 5$ ,

联立  $\begin{cases} \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$ , 解得  $m^2 = 3, n^2 = 2$ . 则双曲线方程为  $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$ ,

$\therefore$  双曲线的标准方程为:  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$  或  $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$  .....12 分

方法二: 设与双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  有相同渐近线的双曲线方程为:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = \lambda (\lambda \neq 0)$  .....8 分

$\therefore$  焦距为  $2\sqrt{5}$ ,  $\therefore c = \sqrt{5}$

$\therefore |4\lambda| + |6\lambda| = 5, \therefore \lambda = \pm \frac{1}{2}$

$\therefore$  双曲线的标准方程为:  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$  或  $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$ . .....12 分

18.解: (1) 设直线  $l$  的方程  $l: x-y+C=0$ , 则  $d = \frac{|C-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1|C-4|}{2\sqrt{2}}$ , 则  $C=2$  ( $C=-2$  舍),

则  $l: x-y+2=0$  .....6分

(2) 设点  $M$  关于直线  $l$  的对称点  $M'(x,y)$ , 则  $\begin{cases} \frac{y}{x+1} = -1 \\ \frac{x-1}{2} - \frac{y}{2} + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ ,

则  $MN: y=1$ , 则  $P(-1,1)$  .....12分

19.解: (1)  $\because$  在菱形  $ABCD$  中,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $DE \perp AB$  于点  $E$ ,

$\therefore DE \perp BE$ ,  $BE \parallel DC$ ,  $\therefore DE \perp DC$ ,

又  $\because A_1D \perp DC$ ,  $A_1D \cap DE = D$ ,  $A_1D, DE \subset$  平面  $A_1DE$ ,

$\therefore DC \perp$  平面  $A_1DE$ ,  $A_1E \subset$  平面  $A_1DE$ ,  $\therefore DC \perp A_1E$ ,

又  $\because A_1E \perp DE$ ,  $DC \cap DE = D$ ,  $DC, DE \subset$  平面  $BCDE$ ,

$\therefore A_1E \perp$  平面  $BCDE$ ; .....5分

(2)  $\because A_1E \perp$  平面  $BCDE$ ,  $DE \perp BE$ ,

$\therefore$  以  $EB, ED, EA_1$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴和  $z$  轴, 建立空间直角坐标系 (如图),

则  $E(0,0,0)$ ,  $A_1(0,0,2)$ ,  $B(2,0,0)$ ,  $C(4,2\sqrt{3},0)$ ,  $D(0,2\sqrt{3},0)$

$\therefore \vec{BA_1} = (-2,0,2)$ ,  $\vec{BC} = (2,2\sqrt{3},0)$ ,  $\vec{DA_1} = (0,-2\sqrt{3},2)$ ,  $\vec{DC} = (4,0,0)$

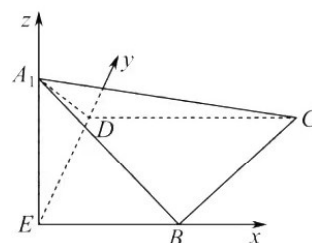
设平面  $BA_1C$  的法向量为  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ , 平面  $DA_1C$  的法向量为  $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$

由  $\vec{BA_1} \cdot \vec{m} = 0$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{m} = 0$ , 得  $\begin{cases} -2x_1 + 2z_1 = 0 \\ 2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0 \end{cases}$ , 令  $y_1 = 1$ , 得  $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$ ,

同理可得  $\vec{n} = (0, 1, \sqrt{3})$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{7} \times 2} = \frac{-\sqrt{7}}{7},$$

$\therefore$  求二面角  $B-A_1C-D$  的平面角的正弦值  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ . .....12分



20.解: (1) 由题意可知圆  $O$  的圆心坐标为  $O(0,0)$ , 半径  $r=3$ , 且直线  $l$  的斜率不为 0,

设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$ ,  $O(0,0)$  到直线  $l$  的距离为  $d$ .

因为  $|AB| = \sqrt{35}$ , 所以  $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - d^2} = \sqrt{35}$ , 解得  $d = \frac{1}{2}$ .

由点到直线的距离公式可得  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{2}$ , 解得  $m = \pm\sqrt{3}$ .

故直线  $l$  的方程为  $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$  或  $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ . .....5 分

(2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $C(x_1, -y_1)$ .

联立  $\begin{cases} x = my + 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ , 整理得  $(m^2 + 1)y^2 + 2my - 8 = 0$ , 则  $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 1}, y_1y_2 = -\frac{8}{m^2 + 1}$ .

假设直线  $BC$  过定点, 由对称性可知所过定点在  $x$  轴上, 设该定点为  $D(t, 0)$ .

因为  $B, C, D$  三点共线, 所以  $\frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1}{t - x_1}$ ,

所以  $t = \frac{(x_2 - x_1)y_1}{y_2 + y_1} + x_1 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_2 + y_1} = \frac{2my_1y_2 + (y_2 + y_1)}{y_2 + y_1} = \frac{2my_1y_2}{y_2 + y_1} + 1 = 9$ .

故直线  $BC$  过定点  $(9, 0)$  .....12 分

21. 解: (I) 证明: 取棱  $AB$  长的一半为单位长度.

$\triangle PAB$  中,  $AB=2, BC=4, \angle ABC=60^\circ$ ,

根据余弦定理, 得  $AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \cos 60^\circ = 12, AC = 2\sqrt{3}$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2, \therefore AB \perp AC$ ,

又  $PB \perp AC, PB \cap AB = B$ ,

$\therefore AC \perp$  平面  $PAB$ .

$\therefore AC \subset$  平面  $ABCD, \therefore$  平面  $ABCD \perp$  平面  $PAB$ .

取  $AB$  中点  $H$ , 连  $PH, CH$ .

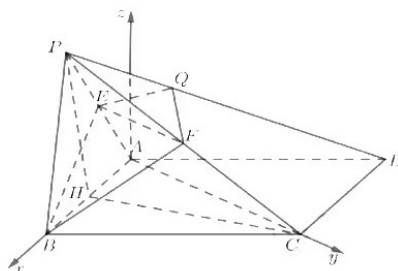
$\therefore \triangle PAB$  是等边三角形,  $\therefore PH \perp AB$ ,

$\therefore PH \perp$  平面  $ABCD$ ,

$\therefore \angle PCH$  是  $CP$  与平面  $ABCD$  所成的角

$RT\triangle PCH$  中,  $PH = \sqrt{3}, CH = \sqrt{AH^2 + AC^2} = \sqrt{13}, PC = 4$

故  $\sin \angle PCH = \frac{PH}{PC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 即为所求. ....5 分



(II) 假设存在点  $Q$ , 使得平面  $BEQF \perp$  平面  $PAD$ .

如图, 以  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  为  $x, y$  轴的正方向建立空间直角坐标系  $A-xyz$ ,

则  $B(2, 0, 0), D(-2, 2\sqrt{3}, 0), P(1, 0, \sqrt{3})$ ,

$\overrightarrow{AD} = (-2, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AP} = (1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (-4, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DP} = (3, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ,

设  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  是平面  $PAD$  的法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AD} = -2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{PD} = x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 1, -1)$$

设  $D\vec{Q} = \lambda D\vec{P}$ , 则

$$\vec{BQ} = \vec{BD} + D\vec{Q} = \vec{BD} + \lambda D\vec{P} = (3\lambda - 4, 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}\lambda)$$

连  $EF$ ,

$\because AC \parallel$  平面  $BEQF$ ,  $AC \subset$  平面  $PAC$ , 平面  $PAC \cap$  平面  $BEQF = EF$ ,

$\therefore AC \parallel EF$ , 取与  $\vec{EF}$  同向的单位向量  $\vec{j} = (0, 1, 0)$

设  $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  是平面  $BEQF$  的法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{j} = y_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{BQ} = (3\lambda - 4)x_2 + 2\sqrt{3}(1 - \lambda)y_2 + \sqrt{3}\lambda z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_2 = (\sqrt{3}\lambda, 0, 4 - 3\lambda)$$

由平面  $BEQF \perp$  平面  $PAD$ , 知  $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ ,

$$\therefore \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\lambda - (4 - 3\lambda) = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3}$$

故在侧棱  $PD$  上存在点  $Q$  且当  $DQ = \frac{2}{3}DP$  时, 使得平面  $BEQF \perp$  平面  $PAD$ . .....12 分

22. 解: (I) 根据三角形重心的性质及已知条件, 得  $|GF_1| + |GF_2| = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

$$\because 4 > |F_1F_2|,$$

$\therefore$  曲线  $C$  是以  $F_1, F_2$  为焦点, 长轴长  $2a = 4$  的椭圆 (不含  $x$  轴上的两点)

$$\text{由 } a = 2, c = \sqrt{3}, \text{ 得 } b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

故  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ ; .....5 分

(II) 法一、 $E(0, -1)$ , 由题意知直线  $PE, ME$  的斜率存在且不为 0,  $PE \perp ME$ , 不妨设直线  $PE$  的斜率为  $k (k > 0)$ , 则  $PE: y = kx - 1$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{8k}{4k^2 + 1} \\ y = \frac{4k^2 - 1}{4k^2 + 1} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \therefore P \left( \frac{8k}{4k^2 + 1}, \frac{4k^2 - 1}{4k^2 + 1} \right)$$

$$\text{得 } |PE| = \sqrt{\left(\frac{8k}{4k^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{4k^2 - 1}{4k^2 + 1} + 1\right)^2} = \frac{8k}{4k^2 + 1} \sqrt{1 + k^2},$$

用  $-\frac{1}{k}$  代替  $k$ , 可得  $|EM| = \frac{8\frac{1}{k}}{4\frac{1}{k^2}+1} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} = \frac{8}{4+k^2} \sqrt{1+k^2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle EPM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8k}{4k^2+1} \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{8}{4+k^2} \sqrt{1+k^2} = \frac{32k(1+k^2)}{(4+k^2)(1+4k^2)} = \frac{32(k+k^3)}{4k^4+17k^2+4} = \frac{32\left(\frac{1}{k}+k\right)}{4k^2+\frac{4}{k^2}+17}$$

设  $k+\frac{1}{k}=\mu$ , 由  $k>0$ , 可得  $k+\frac{1}{k} \geq 2\sqrt{k \cdot \frac{1}{k}}=2$ ,

当且仅当  $k=\frac{1}{k}$ , 即  $k=1$  时, 取等号, 所以  $\mu \geq 2$ ,

则  $S_{\triangle EPM} = \frac{32\mu}{17+4(\mu^2-2)} = \frac{32}{4\mu+\frac{9}{\mu}}$ , 令  $f(\mu) = 4\mu + \frac{9}{\mu} (\mu \geq 2)$ , 函数  $f(\mu)$  在  $[2, +\infty)$  上递增,

所以  $f(\mu) = 4\mu + \frac{9}{\mu} \geq \frac{25}{2}$ , 所以  $\frac{32}{4\mu+\frac{9}{\mu}} \leq \frac{64}{25}$ , 当  $\mu=2$  时, 取等号,

所以  $\triangle EPM$  面积的最大值为  $\frac{64}{25}$ . .....12分

法二、设  $P(x_1, y_1), M(x_2, y_2)$ , 易知  $PM$  斜率存在, 设直线  $PM$  为  $y=kx+m$

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+m \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2+8mkx+4m^2-4=0 \quad \Delta > 0, \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8mk}{1+4k^2} \\ x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2} \end{cases}$$

由  $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \Rightarrow x_1x_2 + (y_1+1)(y_2+1) = 0 \Rightarrow x_1x_2 + (kx_1+m+1)(kx_2+m+1) = 0$

得  $5m^2+2m-3=0$ ,  $\therefore m = \frac{3}{5}$  ( $m=-1$  舍去)

$\therefore PM: y = kx + \frac{3}{5}$  与  $y$  轴交于  $(0, \frac{3}{5})$

$$\therefore S_{\triangle EPM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} |x_1-x_2| = \frac{4\sqrt{\Delta}}{5|a|} = \frac{16\sqrt{4k^2-m^2+1}}{5(4k^2+1)} = \frac{16\sqrt{4k^2+\frac{16}{25}}}{5(4k^2+1)}$$

设  $\sqrt{4k^2+\frac{16}{25}} = u (\mu \geq \frac{4}{5})$

$$\therefore S_{\triangle EPM} = \frac{16}{5} \frac{u}{u^2+\frac{9}{25}} = \frac{16}{5} \frac{1}{u+\frac{9}{25u}}$$
 在  $\mu \geq \frac{4}{5}$  时单调递减,

$\therefore$  当  $u = \frac{4}{5}$ , 即  $k=0$  时,  $(S_{\triangle EPM})_{\max} = \frac{64}{25}$



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线