高三联考数学参考答案(理科)

1. B　由题意可得 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$,则 $A\cap B=\{0,2,5\}$.

2. C　因为 $x^2-3x+12=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{39}{4}\geqslant\frac{39}{4}$,所以命题 p 是假命题. $\neg p$:$\exists x>0,x^2-3x+12\geqslant 0$.

3. D　由题意可得 $f'(x)=(x-2)e^x$. 由 $f'(x)>0$,得 $x>2$,由 $f'(x)<0$,得 $x<2$,则 $f(x)$在 $(-\infty,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,故 $f(x)_{\min}=f(2)=-e^2$.

4. B　$a=-\log_3 2,b=-\log_4 10,c=-\log_2 3$,因为 $\log_4 10>\log_4 9=\log_2 3>1>\log_3 2$,所以 $b<c<a$.

5. C　由图可知 $f(x)$在$(-\infty,3)$上单调递增,在$(3,+\infty)$上单调递减,则 $f(x)$有一个极大值,没有极小值,故 A,B,D 错误,C 正确.

6. B　设甲、乙、丙的年龄分别为 x,y,z,根据已知条件得 $x>y$. 若丙的年龄大于乙的年龄,则 $z>y$,则 $y+z>2y$,因为 $2x>2y$,所以 $y+z>2x$ 未必成立. 若乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍,则 $y+z>2x>2y$,则 $y+z>2y$,即 $z>y$,所以丙的年龄大于乙的年龄. 故“丙的年龄大于乙的年龄”是“乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍”的必要不充分条件.

7. C　由题意可知$\frac{e^{5a+b}}{e^{a+b}}=e^{4a}=3+1$,解得 $e^a=\sqrt{2}$,由 $e^{3a+b}=60$,可得 $e^{6a+b}=e^{3a+b}\cdot(e^a)^3=60\times(\sqrt{2})^3=120\sqrt{2}\approx169.2$(元/千克),最接近 170 元/千克.

8. A　设 $g(x)=f(x)+3=x^5+\tan x$,则 $g(-x)=(-x)^5+\tan(-x)=-x^5-\tan x=-g(x)$,故 $g(x)$是奇函数,从而 $g(m)=-g(-m)$,即 $f(m)+3=-[f(-m)+3]$,即 $f(m)=-f(-m)-6=-4$.

9. B　设 $f(x)=x^3-x^2-x+2$,则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$. 由 $f'(x)>0$,得 $x<-\frac{1}{3}$或 $x>1$,由 $f'(x)<0$,得$-\frac{1}{3}<x<1$,则 $f(x)$在$(-\infty,-\frac{1}{3})$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$(-\frac{1}{3},1)$上单调递减,从而 $f(x)$在$(0,2)$上的最小值为 $f(1)=1>0$,故命题 p 是假命题. 由 $x=2,y=3$,得 $x+y>4$,则命题 q 是假命题,故$(\neg p)\wedge(\neg q)$是真命题.

10. D　设 $g(x)=xf(x)-2x$,则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)-2$. 因为 $f(x)+xf'(x)>2$,所以 $g'(x)>0$,则 $g(x)$是$(-5,5)$上的增函数. 不等式$(2x-3)f(2x-3)-(x-1)f(x-1)>2x-4$ 等价于$(2x-3)f(2x-3)-2(2x-3)>(x-1)f(x-1)-2(x-1)$,即 $g(2x-3)>g(x-1)$,则$\begin{cases}-5<2x-3<5,\\-5<x-1<5,\\2x-3>x-1,\end{cases}$解得 $2<x<4$.

11. C　由题意可得$\frac{1}{a}=\log_5 0.3<0,\frac{1}{b}=\log_5 2>0$,则 $ab<0$,且$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{2a+b}{ab}=\log_5 0.3+\log_5 4=\log_5 1.2\in(0,1)$,即 $0<\frac{2a+b}{ab}<1$. 因为 $ab<0$,所以 $2a+b>ab$,则 A 错误. 因为 $b-$

$2a-(2a+b)=-4a>0$,所以 $b-2a>2a+b>ab$,即 $b-2a-ab>0$,则 B 错误. $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+3b}{ab}=3\log_5 0.3+\log_5 2=\log_5 0.054<-1$. 因为 $ab<0$,所以 $a+3b>-ab$,即 $a+3b+ab>0$,则 C 正确. 因为 $a+3b>-ab>0$,所以 $2a+b-(a-2b)>0$,即 $2a+b>a-2b$,则 D 错误.

12. B　设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x+\frac{1}{x}}$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)(x+\frac{1}{x})-f(x)(1-\frac{1}{x^2})}{(x+\frac{1}{x})^2}=$

$$\frac{f'(x)(x^2+1)-f(x)(x-\frac{1}{x})}{x(x+\frac{1}{x})^2}<0,$$

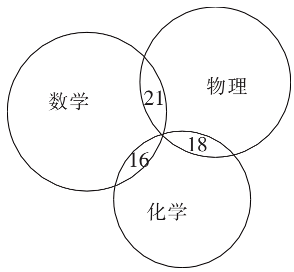
所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$,所以 $a\in(0,1)$,$b=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in(1,\sqrt{2})$,则 $g(a)>g(1)>g(b)$,即 $\frac{\tan\theta f(a)}{\tan^2\theta+1}>\frac{f(1)}{2}>\frac{bf(b)}{b^2+1}$,

因为 $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$,所以 $\frac{\tan\theta f(a)}{\tan^2\theta+1}=f(a)\sin\theta\cos\theta$,所以 $f(1)<f(a)\sin 2\theta$,因为 $f(a)$ 的符号不确定,所以 $f(1)<f(a)$ 未必成立.

因为 $b^2+1=2+\sin 2\theta$,所以 $f(1)>\frac{2bf(b)}{2+\sin 2\theta}$. 由 $\frac{\tan\theta f(a)}{\tan^2\theta+1}>\frac{bf(b)}{b^2+1}$,得 $f(a)\sin\theta\cos\theta>\frac{(\sin\theta+\cos\theta)f(b)}{2+\sin 2\theta}$,即 $f(a)(2+\sin 2\theta)>f(b)(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta})$.

13. $(3,5]$　由题意可得 $\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 5,\\ x-3>0,\end{cases}$ 解得 $3<x\leqslant 5$,即函数 $y=\frac{f(x)}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域是 $(3,5]$.

14. 7　如图,设该校只参加一项竞赛的同学有 x 名,则 $21+16+18+x=62$,解得 $x=7$.



15. $[7,+\infty)$　由 $x^2+a\leqslant ax-3$,得 $a(x-1)\geqslant x^2+3$. 当 $x=1$ 时,$a\in\varnothing$. 当 $x\in(1,2]$ 时,$x-1\in(0,1]$,则 $a\geqslant\frac{x^2+3}{x-1}$. 因为"$\exists x\in[1,2]$,$x^2+a\leqslant ax-3$"是真命题,所以 $a\geqslant(\frac{x^2+3}{x-1})_{\min}$. 因为 $\frac{x^2+3}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+2\in[7,+\infty)$,所以 $a\geqslant 7$.

16. 2023　令 $y=1$,则 $f(x+1)=f(x)+1$,$f(2023)=f(2022)+1=f(2021)+2=f(2020)+3=\cdots=f(1)+2022=2023$.

17. 解:由题意可得 $A=\{x\mid -1<x<6\}$. ………………………………………… 2 分

(1)当 $a=0$ 时,$B=\{x\mid -1\leqslant x<5\}$, ………………………………………… 3 分

则 $A\cap B=\{x\mid -1<x<5\}$. ………………………………………… 5 分

(2)当 $B=\varnothing$ 时,$2a-1\geqslant a+5$,解得 $a\geqslant 6$. ………………………………………… 7 分

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}a<6,\\2a-1>-1,\\a+5\leqslant 6,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$. ………………………………………… 9 分

综上，a 的取值范围是 $(0,1]\cup[6,+\infty)$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1)当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2-3\cdot(-x)-3=x^2+3x-3$. ………… 1 分

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-3x+3$. ………… 3 分

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$， ………………………………………… 4 分

故 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x-3,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-3x+3,x<0.\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

(2)当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 等价于 $x^2-3x-3\geqslant 1$，即 $x^2-3x-4\geqslant 0$，

即 $(x-4)(x+1)\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 4$； ………………………………………… 8 分

当 $x<0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 等价于 $-x^2-3x+3\geqslant 1$，即 $x^2+3x-2\leqslant 0$，

解得 $-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\leqslant x<0$. ………………………………………… 11 分

故不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $[-\frac{3+\sqrt{17}}{2},0)\cup[4,+\infty)$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)由题意可得 $f'(x)=\frac{3}{x}+x-4$， ………………………………………… 1 分

则 $f'(2)=\frac{3}{2}+2-4=-\frac{1}{2}$. ………………………………………… 2 分

因为 $f(2)=3\ln 2+2-8+1=3\ln 2-5$， ………………………………………… 3 分

所以所求切线方程为 $y-(3\ln 2-5)=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-6\ln 2+8=0$. ………… 4 分

(2)由题意可得 $g'(x)=\frac{3}{x}+x-4=\frac{x^2-4x+3}{x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x}$.

由 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>3$，由 $g'(x)<0$，得 $1<x<3$，

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，且 $g(1)=-m-\frac{5}{2}$，$g(3)=-m-\frac{13}{2}+3\ln 3$. ………………………………………… 6 分

当 $-m-\frac{5}{2}<0$，即 $m>-\frac{5}{2}$ 时，$g(x)$ 有且仅有 1 个零点； ………………………… 7 分

当 $-m-\frac{5}{2}=0$，即 $m=-\frac{5}{2}$ 时，$g(x)$ 有 2 个零点； ………………………………… 8 分

当 $\begin{cases}-m-\frac{5}{2}>0,\\-m-\frac{13}{2}+3\ln 3<0,\end{cases}$ 即 $3\ln 3-\frac{13}{2}<m<-\frac{5}{2}$ 时，$g(x)$ 有 3 个零点； ………… 9 分

当$-m-\frac{13}{2}+3\ln 3=0$,即$m=3\ln 3-\frac{13}{2}$时,$g(x)$有 2 个零点; …………………… 10 分

当$-m-\frac{13}{2}+3\ln 3>0$,即$m<3\ln 3-\frac{13}{2}$时,$g(x)$有且仅有 1 个零点. …………… 11 分

综上,当$m>-\frac{5}{2}$或$m<3\ln 3-\frac{13}{2}$时,$g(x)$有且仅有 1 个零点;当$m=-\frac{5}{2}$或$m=3\ln 3-\frac{13}{2}$时,$g(x)$有 2 个零点;当$3\ln 3-\frac{13}{2}<m<-\frac{5}{2}$时,$g(x)$有 3 个零点. ……………… 12 分

20. 解:(1)由题意可得$27000a+630=180$,解得$a=-\frac{1}{60}$. ……………………………… 2 分

当对甲项目投资 30 万元时,对乙项目投资 170 万元,

则$-2a(170-b)^2=\frac{1}{30}(170-b)^2=120$,解得$b=110$. …………………………………… 4 分

设对甲项目的投资金额为x万元,则对乙项目的投资金额为$200-x$万元,

则$\begin{cases}x\geqslant 10,\\200-x\geqslant 10,\end{cases}$解得$10\leqslant x\leqslant 190$. ……………………………………………………… 5 分

故$f(x)=-\frac{1}{60}x^3+21x+\frac{1}{30}[(200-x)-110]^2=-\frac{1}{60}(x^3-2x^2-900x-16200)(10\leqslant x\leqslant 190)$. ……………………………………………………………………………………………… 7 分

(2)设$h(x)=x^3-2x^2-900x-16200(10\leqslant x\leqslant 190)$,$h'(x)=3x^2-4x-900=(3x+50)(x-18)$. ……………………………………………………………………………………………… 8 分

当$x\in[10,18)$时,$h'(x)<0$,当$x\in(18,190]$时,$h'(x)>0$,

则$h(x)$在$[10,18)$上单调递减,在$(18,190]$上单调递增,则$h(x)_{\min}=h(18)=-27216$. ……… 10 分

故$f(x)_{\max}=f(18)=453.6$,即对甲项目投资 18 万元,对乙项目投资 182 万元,才能使总收益$f(x)$取得最大值 453.6 万元. ……………………………………………………………… 12 分

21. (1)解:由$\begin{cases}4-x\geqslant 0,\\x-1\geqslant 0,\end{cases}$ ……………………………………………………………………… 1 分

得$1\leqslant x\leqslant 4$, ……………………………………………………………………………… 2 分

所以$f(x)$的定义域为$[1,4]$. ………………………………………………………………… 3 分

(2)证明:$[f(x)]^2=4-x+x-1+2\sqrt{(4-x)(x-1)}=3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}$, …… 5 分

因为$f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}\geqslant 0$,所以$f(x)=\sqrt{3+2\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}}}$. ………… 6 分

当$1\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$时,$f(x)$单调递增;当$\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4$时,$f(x)$单调递减. ……………………… 7 分

先证明充分性.

若$\frac{3}{2}<a\leqslant 3$,则$\frac{5}{2}<a+1\leqslant 4$, …………………………………………………………… 8 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上存在最大值，且最大值为 $f(\frac{5}{2})$ 或 $f(a)$，所以充分性成立. …………………………………………………………………………………… 9分

再证明必要性.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上存在最大值，则 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上可能先增后减，还可能单调递减，………………………………………………………………………… 10分

则 $\frac{5}{2}\in[a,a+1)$ 或 $a\geqslant\frac{5}{2}$，又 $[a,a+1)\subseteq[1,4]$，所以 $\frac{3}{2}<a\leqslant3$，所以必要性成立. … 11分

综上，$f(x)$ 在区间 $[a,a+1)$ 上存在最大值的充要条件是 $\frac{3}{2}<a\leqslant3$. ……………………… 12分

22.(1)解：由题意可得 $f'(x)=a(x+1)e^x$. …………………………………………………… 1分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>-1$，由 $f'(x)<0$，得 $x<-1$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；…………………………… 3分

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $x>-1$，由 $f'(x)>0$，得 $x<-1$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………… 5分

(2)证明：因为 $x>0$，所以 $\frac{xe^x}{x+1}>0$.

因为 $a\geqslant\frac{4}{e^2}$，所以 $\frac{axe^x}{x+1}-(x+1)\ln x\geqslant\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x$. ………………………………… 6分

要证 $\frac{f(x)}{x+1}-(x+1)\ln x>0$，即证 $\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x>0$，即证 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$. ……… 7分

设 $g(x)=\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}$，则 $g'(x)=\frac{4e^{x-2}(x-1)}{(x+1)^3}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{e}$. ………………………………………………………………… 9分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

故 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$. ………………………………………………………………… 11分

因为 $g(x)_{\min}=h(x)_{\max}$，且两个最值的取等条件不同，所以 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$，

即当 $a\geqslant\frac{4}{e^2}$ 时，$\frac{f(x)}{x+1}-(x+1)\ln x>0$. ……………………………………………… 12分