参考答案

普高联考2022—2023学年高三测评(四)

理科数学

1. B 【解析】由题可知 $B=\{x|x\geqslant 6$ 或 $x\leqslant 3\}$,则 $A\cap B=\{x|2<x\leqslant 3\}$,$A\cup B=\{x|x<4$ 或 $x\geqslant 6\}$,依据选项可知 B 正确,故选 B. 来源:高三答案公众号

2. D 【解析】设复数 $z=a+b\mathrm{i}$,$a,b\in\mathbf{R}$,则 $a+b\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=-(a+b)+(3b-a)\mathrm{i}=-3+5\mathrm{i}$,即 $\begin{cases}-(a+b)=-3,\\3b-a=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$ 则 $z=1+2\mathrm{i}$,故 z 的虚部为 2,故选 D.

3. B 【解析】方法一 当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}\times 2^n-m-(\frac{1}{3}\times 2^{n-1}-m)=\frac{1}{3}\times 2^{n-1}$,当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-m=S_1$,解得 $m=\frac{1}{3}$,则 $S_n=\frac{1}{3}\times 2^n-\frac{1}{3}$,则 $S_4=5$. 故选 B.

方法二 显然公比 $q\neq 1$,$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{-a_1q^n}{1-q}+\frac{a_1}{1-q}=\frac{-a_1}{1-q}q^n-\frac{-a_1}{1-q}$,所以 $m=\frac{1}{3}$,即 $S_n=\frac{1}{3}\times 2^n-\frac{1}{3}$,则 $S_4=5$. 故选 B.

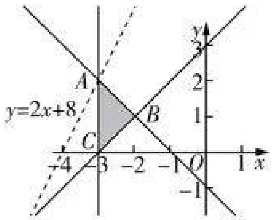
4. C 【解析】设 $AB=m$,则 $BC=\frac{m}{\tan 60^\circ}=\frac{m}{\sqrt{3}}$,在 $\triangle BCD$ 中,$\angle CBD=105^\circ$,由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin 105^\circ}=\frac{BC}{\sin 45^\circ}$,因为 $\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,代入数据,解得 $m=90-30\sqrt{3}\approx 90-30\times 1.7=39$(米),故选 C.

5. A 【解析】函数 $y=f(x)=\frac{x-3\sin x}{\mathrm{e}^{|x|}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\frac{-x-3\sin(-x)}{\mathrm{e}^{|-x|}}=\frac{-x+3\sin x}{\mathrm{e}^{|x|}}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,图象关于原点对称,排除 BD 选项,只需研究 $x>0$ 的图象,当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,$\frac{\pi}{6}-3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}<0$,则 $f(\frac{\pi}{6})<0$,排除 C 选项,故选 A.

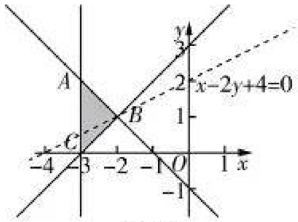
6. B 【解析】方法一 “书法、舞蹈这两项活动至多有一项被选中”分两种情况:①都没有被选中,有 C_3^3 种情况;②两项活动只有一项被选中,有 $C_2^1C_3^2$ 种情况,则所求概率为 $P=\frac{C_3^3+C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{7}{10}=0.7$,故选 B.

方法二 “书法、舞蹈这两项活动至多有一项被选中”的对立事件是“书法、舞蹈这两项活动都被选中”,故所求概率为 $P=1-\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{7}{10}=0.7$,故选 B.

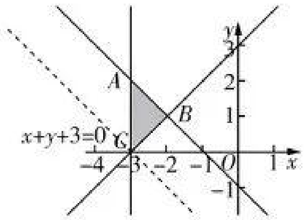
7. C 【解析】不等式组的解集 D 表示的可行域如图中阴影部分所示,依据图(1)知命题 p_1 为真命题,依据图(2)知命题 p_2 为真命题,依据图(3)知命题 p_3 为假命题,依据图(4)知命题 p_4 为真命题. 所以真命题有 3 个,故选 C.



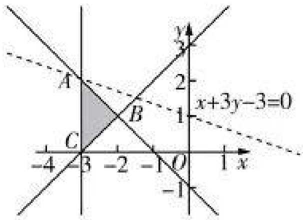
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

8. A 【解析】如图，过点 A,B 分别作准线的垂线，垂足分别为 N,E，根据抛物线的定义得 $|AF|=|AN|$，$|BF|=|BE|$，因为 F 为 AM 的中点，所以 $\frac{|AF|}{|BM|}=\frac{|BF|+|BM|}{|BM|}=\frac{|BF|}{|BM|}+1$，又 $\frac{|BF|}{|BM|}=\frac{|BE|}{|BM|}=\frac{|AN|}{|AM|}=\frac{|AF|}{|AM|}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{|AF|}{|BM|}=\frac{|BF|}{|BM|}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，所以 $\lambda=\frac{3}{2}$，故选 A.

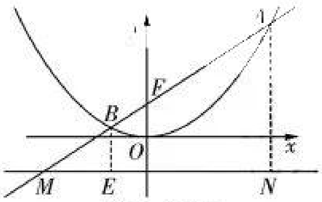
9. B 【解析】由题意，$a_1\to a_2\to a_3\to a_4\to a_5\to a_6\to a_7$ 的可能情况有：

①$2\to1\to4\to2\to1\to4\to2$；②$16\to8\to4\to2\to1\to4\to2$；

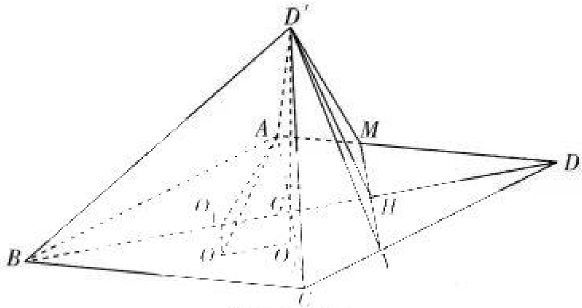
③$20\to10\to5\to16\to8\to4\to2$；④$3\to10\to5\to16\to8\to4\to2$；

⑤$128\to64\to32\to16\to8\to4\to2$；⑥$21\to64\to32\to16\to8\to4\to2$.

$\therefore m$ 的所有可能取值为 2，16，20，3，128，21，所有可能取值的和为 190. 故选 B.



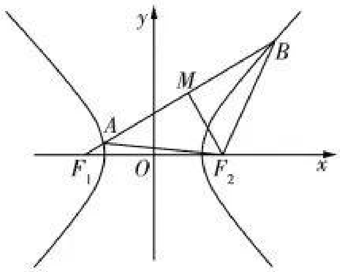
第 8 题图



第 10 题图

10. B 【解析】如图，因为 $AM=\frac{1}{3}MD$，$CN=\frac{1}{3}ND$，所以 $MN/\!/AC$，设 MN 与 BD 的交点为 H，连接 $D'H$，因为 $AD=CD=AB=5$，$GA=GC=3$，所以 $DG=4$，则 $GH=1$，$DH=3$，所以 $D'H=3$. 又 $GD'=2\sqrt{2}$，则 $D'G^2+GH^2=D'H^2$，则 $D'G\perp GH$. 又 $D'G\perp AC$，$AC\cap HG=G$，故 $D'G\perp$ 平面 ABC. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，$\triangle AD'C$ 的外接圆圆心为 O_2，过 O_1，O_2 分别作平面 ABC，平面 $AD'C$ 的垂线，设两垂线交于点 O，则 O 是三棱锥 $D'-ABC$ 外接球的球心，且四边形 O_1OO_2G 为矩形. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r_1，在 $\triangle ABC$ 中，由 $(4-r_1)^2+3^2=r_1^2$，解得 $r_1=\frac{25}{8}$，同理可得 $\triangle AD'C$ 的外接圆半径 $r_2=\frac{17\sqrt{2}}{8}$，所以 $GO_2=\frac{\sqrt{2}}{8}$. 设三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球半径为 R，则 $R^2=O_1A^2+GO_2^2=\frac{625}{64}+\frac{2}{64}=\frac{627}{64}$，则三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{627}{16}\pi$，故选 B.

11. D 【解析】如图，连接 AF_2，BF_2，因为 M 为 AB 的中点，$F_2M\perp AB$，所以 $|AF_2|=|BF_2|$. 设 $|AF_2|=|BF_2|=m$，因为 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以 $|AF_1|=m-2a$，又因为 $|BF_1|-|BF_2|=2a$，所以 $|BF_1|=m+2a$，则 $|AB|=|BF_1|-|AF_1|=4a$.



因为 M 为 AB 的中点,所以 $|AM|=|BM|=2a$,则 $|F_1M|=m$. 设 $|F_1F_2|=2c$,在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$ 中,$|F_2M|=\sqrt{4c^2-m^2}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_2M$ 中,$|F_2M|=\sqrt{m^2-4a^2}$,则 $\sqrt{4c^2-m^2}=\sqrt{m^2-4a^2}$,解得 $m^2=2a^2+2c^2$,所以 $|F_2M|=\sqrt{2c^2-2a^2}$.

当 $\angle AF_1F_2=30°$ 时,$\sin\angle AF_1F_2=\frac{|F_2M|}{2c}=\frac{\sqrt{2c^2-2a^2}}{2c}=\frac{1}{2}$,则 $c^2=2a^2$,所以离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. 故选 D.

12. D 【解析】令 $f(x)=e^x-1-\tan x=\frac{e^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$,$0<x<\frac{\pi}{4}$,令 $g(x)=e^x\cos x-\cos x-\sin x$,则 $g'(x)=(-\sin x+\cos x)e^x+\sin x-\cos x=(e^x-1)(\cos x-\sin x)$,当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$g'(x)>0$,则 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增,又 $g(0)=1-1=0$,所以当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时,$g(x)>0$,又 $\cos x>0$,所以 $f(x)>0$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上恒成立,又 $0<0.618<\frac{\pi}{4}$,所以 $f(0.618)>0$,即 $a>c$.

令 $h(x)=\ln(x+1)-x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$,当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$h(x)<h(0)=0$,即 $\ln(x+1)<x$.

令 $k(x)=x-\tan x$,则 $k'(x)=1-\frac{1}{\cos^2x}\leqslant 0$,$k(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减,所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$k(x)<k(0)=0$,即 $x<\tan x$,所以 $\ln(x+1)<x<\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立. 令 $x=0.618$,则 $\ln(0.618+1)<0.618<\tan 0.618$,所以 $c>b$. 综上所述,$a>c>b$. 故选 D.

13. 90 【解析】由题知 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}(\frac{3}{x})^r=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{10-3r}$,当 $r=2$ 时,$T_3=90x^4$,故 x^4 的系数为 90.

14. $\frac{5}{2}$ 【解析】以点 A 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ 的方向为 x 轴,y 轴正方向,建立平面直角坐标系,则 $M(1,\frac{1}{2})$,$B(2,0)$,$D(0,1)$,设 $N(m,0)(0\leqslant m\leqslant 2)$,所以 $\overrightarrow{MB}=(1,-\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{DN}=(m,-1)$,则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}=m+\frac{1}{2}$,因为 $0\leqslant m\leqslant 2$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}\leqslant\frac{5}{2}$,即 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

15. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 【解析】令 $y=0$,得 $x^2+2x-8=0$,解得 $x=-4$ 或 $x=2$,则 $A(-4,0)$,$B(2,0)$. 设 $N(x,y)$,因为 $\frac{|NA|}{|NB|}=2$,所以 $|NA|=2|NB|$,则 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,整理得 $(x-4)^2+y^2=16$,则点 N 的轨迹是圆心为 $(4,0)$,半径 $R=4$ 的圆. 又圆 M 的方程为 $(x+1)^2+y^2=9$,则圆 M 的圆心为 $(-1,0)$,半径为 $r=3$. 因为 $4-3<4-(-1)<4+3$,所以两圆相交,设直线 l 与圆 M 和圆 N 的切点分别为 C,D,连接 CM,DN,过 M 作直线 DN 的垂线,垂足为点 E,因为 $MN=5$,$NE=1$,所以 $ME=2\sqrt{6}$,则 $\tan\angle EMN=\frac{\sqrt{6}}{12}$,结合两圆公切线的几何性质知直线 l 的斜率为 $k=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

16. $[\frac{11}{4},4]$ 【解析】函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度,得到 $y=\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象,再将图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$,纵坐标不变,得到 $y=\cos(\omega x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象,因为函数 $g(x)$ 的图象与 $y=\cos(\omega x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象关于 x 轴对称,所以 $g(x)=-\cos(\omega x+\frac{2\pi}{3})=\sin(\omega x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$. 令 $\omega x+\frac{\pi}{6}=k_1\pi, k_1\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{6k_1\pi-\pi}{6\omega}, k_1\in\mathbf{Z}$,所以 $g(x)$ 的第 2 个、第 3 个正零点分别为 $\frac{11\pi}{6\omega},\frac{17\pi}{6\omega}$,则 $\begin{cases}\frac{11\pi}{6\omega}\leqslant\frac{2\pi}{3},\\ \frac{17\pi}{6\omega}>\frac{2\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{11}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k_2\pi\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k_2\pi, k_2\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k_2\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k_2\pi}{\omega}, k_2\in\mathbf{Z}$, 令 $k_2=0$,得 $g(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}]$ 上单调递增,所以 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}]\subseteq[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}]$,所以 $\begin{cases}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{12},\\ \frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{12},\end{cases}$ 又 $\omega>0$,解得 $0<\omega\leqslant4$. 综上所述,$\frac{11}{4}\leqslant\omega\leqslant4$,故 ω 的取值范围是 $[\frac{11}{4},4]$.

17. (1)由正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin B-\sin A\cos C)=\sin C\sin A$, 2 分

又 $A+B+C=\pi$,则 $\sqrt{3}[\sin(A+C)-\sin A\cos C]=\sin C\sin A$,化简得 $\sqrt{3}\cos A\sin C=\sin C\sin A$. 4 分

又 $\sin C>0$,所以 $\sqrt{3}\cos A=\sin A$,则 $\tan A=\sqrt{3}$. 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 6 分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,解得 $bc=9$. 8 分

在 $\triangle ABD$ 中,$AD=\frac{1}{3}b$,由余弦定理得 $BD^2=c^2+\frac{1}{9}b^2-2\times c\times\frac{1}{3}b\times\cos\frac{\pi}{3}=c^2+\frac{1}{9}b^2-\frac{1}{3}bc\geqslant 2\sqrt{c^2\times\frac{1}{9}b^2}-\frac{1}{3}bc=\frac{1}{3}bc=3$,当且仅当 $b=3\sqrt{3}, c=\sqrt{3}$ 时等号成立, 11 分

所以 BD 的最小值为 $\sqrt{3}$. 12 分

18. (1)因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$, $MO\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $MO\perp AD$. 1 分

因为 O 为线段 CD 的中点,E 为线段 AD 的中点,所以 $DO=2, DE=\sqrt{2}$, 2 分

因为 $\angle ADC=45°$,由余弦定理得 $EO^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$,

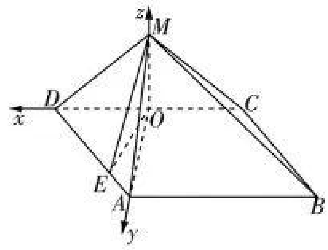
则 $EO^2+DE^2=DO^2$,则 $DE\perp EO$. 4 分

因为 $MO\cap EO=O$,所以 $AD\perp$ 平面 MOE, 5 分

又因为 $AD\subset$ 平面 MAD,所以平面 $MOE\perp$ 平面 MAD. 6 分

(2)连接 OA,由(1)知当 E 为线段 AD 的中点时,$AE=DE=EO=\sqrt{2}$,则 $AO=2$,

所以 $DO^2+OA^2=AD^2$，则 $DO\perp OA$. 7 分



以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

又 $MC=2\sqrt{2}$，则 $MO=2$，来源：高三答案公众号

所以 $O(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$A(0,2,0)$，$M(0,0,2)$.

又 $3AE=DE$，则 $E(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{OM}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{DM}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{DA}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{OE}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0)$. 9 分

设平面 MAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{m}=-2x_1+2z_1=0,\\ \overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=-2x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=z_1,\\ x_1=y_1,\end{cases}$

不妨取 $x_1=1$，则平面 MAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. 10 分

设平面 MEO 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}y_2=0,\\ \overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{n}=2z_2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_2=-3y_2,\\ z_2=0,\end{cases}$

不妨取 $x_2=3$，则平面 MEO 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-1,0)$. 11 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$，则二面角 $D-ME-O$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{15}$. 12 分

19. (1) 由 $y=a\cdot x^b$ 得，$\ln y=\ln(a\cdot x^b)=\ln a+b\ln x$. 令 $u=\ln x$，$v=\ln y$，$c=\ln a$，则 $v=c+bu$. 2 分

由表中数据可得，$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{0.4}{1.6}=0.25$， 3 分

则 $\hat{c}=\bar{v}-\hat{b}\bar{u}=\frac{26.02}{5}-0.25\times\frac{16.1}{5}=4.399$，所以 $\hat{v}=4.399+0.25u$. 4 分

即 $\ln\hat{y}=4.399+0.25\ln x=\ln(e^{4.399}\cdot x^{\frac{1}{4}})$，因为 $e^{4.399}\approx 81$，所以 $\hat{y}=81x^{\frac{1}{4}}$，

故所求的回归方程为 $y=81x^{\frac{1}{4}}$. 6 分

(2) 设年收益为 W 万元，则 $W=4y-x-120=324x^{\frac{1}{4}}-x-120$， 8 分

对 $W=f(x)$ 求导，得 $f'(x)=81x^{-\frac{3}{4}}-1$，

令 $81x^{-\frac{3}{4}}-1=0$，解得 $x=243\sqrt[3]{3}\approx 243\times\frac{13}{9}=351$， 10 分

当 $x\in(0,351)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(351,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

因此，当 $x=351$ 时 W 有最大值，即该公司每年投入 351 万元营销费用时，该产品一年的收益达到最大. 12 分

20. (1) 设椭圆右焦点的坐标为 $(c,0)$ $(c>0)$，则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$，

又 $a^2=b^2+c^2$，则 $b^2=3c^2$， 1 分

因为点 $(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆上，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，即 $\frac{1}{4c^2}+\frac{3}{4c^2}=1$，解得 $c=1$， 2 分

则 $a=2,b=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 3 分

(2) 由(1)知 $F(1,0)$，因为直线 l 的斜率不为 0，所以可设直线 l 的方程为 $x=ky+1$，

代入椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，消去 x 化简得 $(3k^2+4)y^2+6ky-9=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-6k}{3k^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3k^2+4}$. 5 分

设线段 AB 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3k}{3k^2+4}$，$x_0=ky_0+1=\frac{-3k^2}{3k^2+4}+1=\frac{4}{3k^2+4}$，即 $Q(\frac{4}{3k^2+4},\frac{-3k}{3k^2+4})$，则直线 m 的方程为 $y=-\frac{3k}{4}x$，

代入椭圆 C 的方程可得 $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3k^2+4}}$，不妨设 $M(\frac{4}{\sqrt{3k^2+4}},\frac{-3k}{\sqrt{3k^2+4}})$，$N(-\frac{4}{\sqrt{3k^2+4}},\frac{3k}{\sqrt{3k^2+4}})$.

7 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{-6k}{3k^2+4})^2-4\times\frac{-9}{3k^2+4}}=$

$\sqrt{1+k^2}\times\frac{12\sqrt{1+k^2}}{3k^2+4}=\frac{12(1+k^2)}{3k^2+4}$， 8 分

点 M,N 到直线 l 的距离分别为 $d_1=\frac{|x_M-ky_M-1|}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\frac{|x_N-ky_N-1|}{\sqrt{1+k^2}}$，

则四边形 $AMBN$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times|AB|\times d_1+\frac{1}{2}\times|AB|\times d_2=\frac{1}{2}\times|AB|\times(d_1+d_2)=\frac{1}{2}\times|AB|\times(\frac{|x_M-ky_M-1|}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{|x_N-ky_N-1|}{\sqrt{1+k^2}})$.

因为点 M,N 在直线 l 的两侧，所以 $S=\frac{1}{2}\times|AB|\times|\frac{x_M-ky_M-1}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{x_N-ky_N-1}{\sqrt{1+k^2}}|=\frac{1}{2}\times|AB|\times|\frac{x_M-x_N-k(y_M-y_N)}{\sqrt{1+k^2}}|=\frac{1}{2}\times|AB|\times\frac{2\sqrt{3k^2+4}}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{12(1+k^2)}{3k^2+4}\times\frac{2\sqrt{3k^2+4}}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{12\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3k^2+4}}=$

$12\sqrt{\frac{1+k^2}{3k^2+4}}=4\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{1}{3k^2+4}}$， 11 分

因为 $0<\frac{1}{3k^2+4}\leqslant\frac{1}{4}$，所以 $6\leqslant S<4\sqrt{3}$.

因此，四边形 $AMBN$ 的面积的取值范围为 $[6,4\sqrt{3})$. 12 分

21. (1) 因为 $f(x)=2x-x\cos x-\sin x$，所以 $f'(x)=2-2\cos x+x\sin x$，

因为 $f'(\pi)=4$，$f(\pi)=3\pi$，所以切线方程为 $y-3\pi=4(x-\pi)$，即 $y=4x-\pi$. 4 分

(2) **方法一** ①若 $m\geqslant1$，

由 $2mx-mx\cos x-\sin x-(2x-x\cos x-\sin x)=2(m-1)x-(m-1)x\cos x=(m-1)x(2-\cos x)\geqslant0$，

可得 $f(x)\geqslant2x-x\cos x-\sin x$，

设 $g(x)=2x-x\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=2-2\cos x+x\sin x$，

当 $x\in(0,\pi]$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增，则 $g(x)>g(0)=0$，

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时,$g(x)=x(1-\cos x)+(x-\sin x)>0$,所以 $g(x)>0$,

所以 $f(x)>0$ 恒成立,符合题意. 来源:高三答案公众号　　6 分

②若 $m\leqslant 0$,$f(x)=2mx-mx\cos x-\sin x=mx(1-\cos x)+mx-\sin x$,

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$f(x)<0$,不合题意.　　8 分

③若 $0<m<1$,$f'(x)=2m-(m+1)\cos x+mx\sin x$,

设 $h(x)=f'(x)$,则 $h'(x)=(2m+1)\sin x+mx\cos x$,

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$h'(x)>0$,所以 $f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

因为 $f'(\frac{\pi}{2})=(2+\frac{\pi}{2})m>0$,$f'(0)<0$,所以存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得 $f'(x_0)=0$,

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,$f(x)<f(0)=0$,不合题意.

综上所述,m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.　　12 分

方法二　由题知 $2mx-mx\cos x-\sin x>0$,即 $mx(2-\cos x)>\sin x$,

因为 $x>0$,$2-\cos x>0$,所以 $m>\dfrac{\sin x}{2x-x\cos x}$.　　5 分

设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2x-x\cos x}$,则 $g'(x)=\dfrac{2x\cos x-x-2\sin x+\sin x\cos x}{(2x-x\cos x)^2}$,　　7 分

设 $h(x)=2x\cos x-x-2\sin x+\sin x\cos x$,

则 $h'(x)=-2\sin x(x+\sin x)$,当 $x\in(0,\pi)$ 时,$h'(x)<0$,

所以 $h(x)$ 单调递减,$h(x)<h(0)=0$,

所以当 $x\in(0,\pi)$ 时,$g(x)$ 单调递减,$g(x)<g(0)$.

由洛必达法则知:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2-\cos x+x\sin x}=1$,所以 $g(x)<1$.

当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时,$g(x)=\dfrac{\sin x}{x(2-\cos x)}<1$,所以 $g(x)<1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

又 $m>g(x)$,则 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.　　12 分

方法三　由题知当 $m>0$ 时,$2mx-mx\cos x-\sin x>0$,即 $mx(2-\cos x)>\sin x$,

因为 $2-\cos x>0$,所以 $mx>\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.　　5 分

设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$,因为 $g(x+2\pi)=g(x)$,所以 $g(x)$ 为周期函数,且周期为 2π.

$g'(x)=\dfrac{\cos x(2-\cos x)-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$,　　7 分

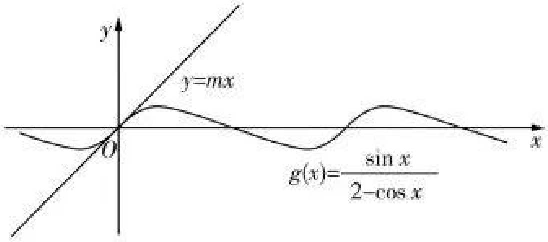
令 $g'(x)=0$,则 $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以当 $x\in(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$g'(x)>0$,则 $g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$ 单调递减.

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$ 时,$g''(x)=\dfrac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}<0$,　　10 分

$g'(0)=1$,当 $m=1$ 时,直线 $y=mx$ 与曲线 $y=g(x)$ 相切,如图,



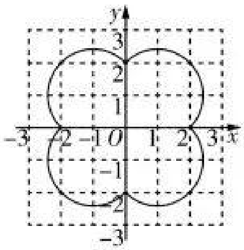
根据图象可知,要使 $mx>\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$,只需 $m\geqslant 1$,故实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. 12 分

22. (1)将直线的参数方程消去 t,得普通方程为 $x+y-2=0$. 来源:高三答案公众号

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2|\sin\theta|+2|\cos\theta|$,即 $\rho^2=2|\rho\sin\theta|+2|\rho\cos\theta|$,

又 $\rho^2=x^2+y^2$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2|x|-2|y|=0$.

则曲线 C 的简图如图所示.



5 分

(2)不妨设点 A 位于第一象限,结合图形和直线 $m:\theta=\alpha(\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}])$ 可知,

$\rho_A=2\sin\alpha+2\cos\alpha$, $\rho_B=-2\sin(\pi+\alpha)-2\cos(\pi+\alpha)=2\sin\alpha+2\cos\alpha$,

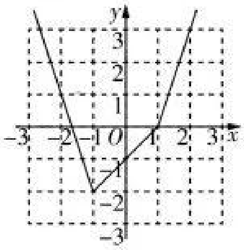
则 $|AB|=\rho_A+\rho_B=4\sin\alpha+4\cos\alpha=4\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{6}$,所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$,

则 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 或 $\alpha=\frac{5\pi}{12}$. 10 分

23. (1)由题知 $f(x)=\begin{cases}-3x-5, x\leqslant -1,\\ x-1, -1<x<1,\\ 3x-3, x\geqslant 1,\end{cases}$

描点 $(-2,1)$, $(-1,-2)$, $(1,0)$, $(2,3)$,连线得 $y=f(x)$ 的图象如图所示.



通过图象可知,当 $x=-1$ 时,函数 $y=f(x)$ 的最小值为 -2,即 $m=-2$. 5 分

(2)由(1)知 $m=-2$,则 $a+b+c=-m+1=3$,

$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$, $\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$, $\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$,

三个式子相加得 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c=3$,当且仅当 $a=b=c=1$ 时等式成立,

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ 的最小值为 3. 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。