

参考答案

一、选择题

1-5 BDCAA

二、填空题

6、 $a \geq \frac{1}{2}$ 或 $a \leq -\frac{3}{2}$

7、50

8、如图，分别过点 P ， Q 作 y 轴的垂线，垂足分别为 C ， D 。

设点 A 的坐标为 $(0, t)$ ，则点 B 的坐标为 $(0, -t)$ 。

设直线 PQ 的函数解析式为 $y = kx + t$ ，并设 P ， Q 的坐标分别为 (x_P, y_P) ， (x_Q, y_Q) 。由

标分别为 (x_P, y_P) ， (x_Q, y_Q) 。由

$$\begin{cases} y = kx + t, \\ y = \frac{2}{3}x^2, \end{cases}$$

得

$$\frac{2}{3}x^2 - kx - t = 0,$$

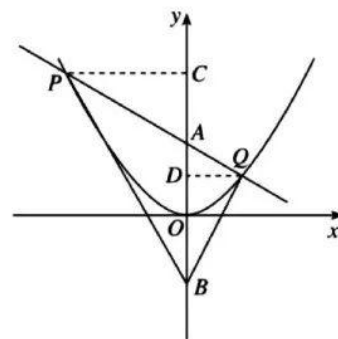
(第 13 题)

于是

$$x_P x_Q = -\frac{3}{2}t, \text{ 即 } t = -\frac{2}{3}x_P x_Q.$$

于是

$$\frac{BC}{BD} = \frac{y_P + t}{y_Q + t} = \frac{\frac{2}{3}x_P^2 + t}{\frac{2}{3}x_Q^2 + t} = \frac{\frac{2}{3}x_P^2 - \frac{2}{3}x_P x_Q}{\frac{2}{3}x_Q^2 - \frac{2}{3}x_P x_Q} = \frac{\frac{2}{3}x_P(x_P - x_Q)}{\frac{2}{3}x_Q(x_Q - x_P)} = -\frac{x_P}{x_Q}.$$



又因为 $\frac{PC}{QD} = -\frac{x_P}{x_Q}$, 所以 $\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{QD}$.

因为 $\angle BCP = \angle BDQ = 90^\circ$, 所以 $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$,

故 $\angle ABP = \angle ABQ$.

(2) 设 $PC = a$, $DQ = b$, 不妨设 $a \geq b > 0$, 由 (1) 可知

$$\angle ABP = \angle ABQ = 30^\circ, \quad BC = \sqrt{3}a, \quad BD = \sqrt{3}b,$$

所以 $AC = \sqrt{3}a - 2, \quad AD = 2 - \sqrt{3}b.$

因为 $PC \parallel DQ$, 所以 $\triangle ACP \sim \triangle ADQ$.

于是 $\frac{PC}{DQ} = \frac{AC}{AD}$, 即 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}a - 2}{2 - \sqrt{3}b}$,

所以 $a + b = \sqrt{3}ab$.

由 (1) 中 $x_P x_Q = -\frac{3}{2}t$, 即 $-ab = -\frac{3}{2}$, 所以 $ab = \frac{3}{2}$, $a + b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

于是可求得 $a = 2b = \sqrt{3}$.

将 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $y = \frac{2}{3}x^2$, 得到点 Q 的坐标 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

再将点 Q 的坐标代入 $y = kx + 1$, 求得 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

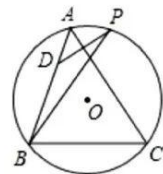
所以直线 PQ 的函数解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

9、1008015

10、 21°

11、点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点, 使得 $AB = 3AD$, P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上一点, 使得

$\angle ADP = \angle ACB$, 则 $\frac{PB}{PD}$ 的值为 $\sqrt{3}$.



解：连接 AP，

$\because \angle APB$ 与 $\angle ACB$ 是 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角，

$$\therefore \angle APB = \angle ACB,$$

$$\because \angle ADP = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ACB = \angle ADP,$$

$$\because \angle DAP = \angle DAP,$$

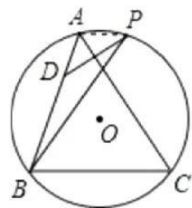
$$\therefore \triangle APB \sim \triangle ADP,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AP} = \frac{PD}{PB},$$

$$\therefore AP^2 = AD \cdot AB = AD \cdot (3AD) = 3AD^2,$$

$$\therefore \frac{PB}{PD} = \frac{AP}{AD} = \frac{\sqrt{3}AD}{AD} = \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$.



三、解答题。

12、(1) $y = 3x - 2$, $z = -2x + 3$

(2) 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $u_{\min} = -\frac{1}{2}$

13、(1) 一月 Iphone4 每台售价为 4500 元

(2) 有 5 种进货方案

(3) 当 $a=100$ 时 (2) 中所有方案获利相同

14、 $S_{\triangle ABC} = 36$

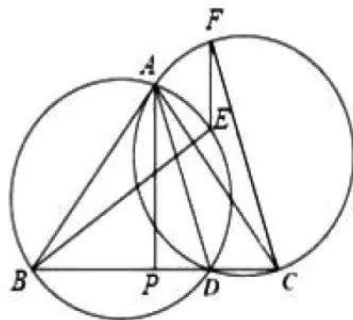
15、(1) $y = -\frac{9}{x}$

(2) $\theta = 15^\circ$

16、(1) $m=2$

(2) $S_{\min} = 1$ 或 $\sqrt{9+12\sqrt{2}}$

17、如图， $\triangle ABC$ 为等腰三角形， AP 是底边 BC 上的高，点 D 是线段 PC 上的一点， BE 和 CF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圆直径，连接 EF 。求证： $\tan \angle PAD = \frac{EF}{BC}$ 。



证明：如图，连接 ED ， FD 。

$\because BE$ 和 CF 都是直径，

$\therefore ED \perp BC$ ， $FD \perp BC$ ，

$\therefore D$ ， E ， F 三点共线，

连接 AE ， AF ，则 $\angle AEF = \angle ABC = \angle ACB = \angle AFD$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEF$ 。

作 $AH \perp EF$ ，垂足为 H 。

又 $\because AP \perp BC$ ， $DF \perp BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $APDH$ 是矩形，

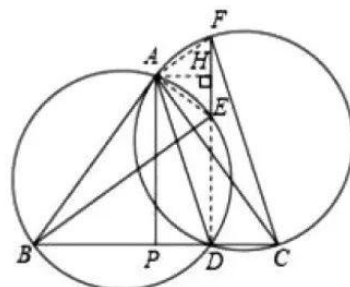
$\therefore AH = PD$ 。

$\because \triangle ABC \sim \triangle AEF$ 。

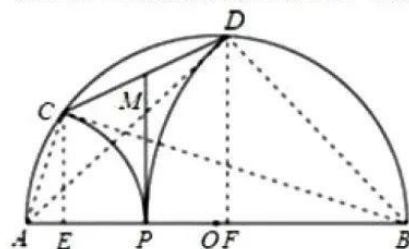
$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AH}{AP}$$

$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{PD}{AP}$$

$$\therefore \tan \angle PAD = \frac{PD}{AP} = \frac{EF}{BC}$$



18、已知 AB 为半圆 O 的直径，点 P 为直径 AB 上的任意一点，以点 A 为圆心， AP 为半径作 $\odot A$ ， $\odot A$ 与半圆 O 相交于点 C ；以点 B 为圆心， BP 为半径作 $\odot B$ ， $\odot B$ 与半圆 O 相交于点 D ，且线段 CD 的中点为 M 。求证： MP 分别与 $\odot A$ 和 $\odot B$ 相切。



：证明：如图，连接 AC ， AD ， BC ， BD ，并且分别过点 C ， D 作 $CE \perp AB$ ， $DF \perp AB$ ，垂足分别为 E ， F

$\therefore CE \parallel DF$ ， $\angle AEC = 90^\circ$ ， $\angle BFD = 90^\circ$ 。

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ 。

又 $\because \angle CAB$ 是 $\triangle ACB$ 和 $\triangle AEC$ 的公共角，

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle AEC$ 。

$\therefore AC : AB = AE : AC$

即 $PA^2 = AC^2 = AE \cdot AB$ ，

同理 $PB^2 = BD^2 = BF \cdot AB$ 。

两式相减可得 $PA^2 - PB^2 = AB (AE - BF)$ ，

$\therefore PA^2 - PB^2 = (PA + PB) (PA - PB) = AB (PA - PB)$ ，

$\therefore AE - BF = PA - PB$ ，即 $PA - AE = PB - BF$ ，

$\therefore PE = PF$ 。

$\therefore$ 点 P 是线段 EF 的中点。

$\because M$ 是 CD 的中点，

$\therefore$ MP 是直角梯形 CDEF 的中位线,

$$\therefore MP \perp AB,$$

$\therefore MP$ 分别与 $\odot A$ 和 $\odot B$ 相切.

