大联考数学七
参考答案、提示及评分细则

1. D 由$z(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}^5$，得$z=\frac{\mathrm{i}^5}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$，所以$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$，则$\bar{z}$在复平面内对应的点的坐标为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限.

2. A 由已知可得$A=\{x|x^2-x-6>0\}=\{x|x>3$或$x<-2\}$，$B=\{x|9-x^2\geqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，所以$A\cap B=\{x|-3\leqslant x<-2\}$.

3. C $\sin 226^\circ\cos 196^\circ-\sin 164^\circ\sin 44^\circ=-\sin 46^\circ(-\cos 16^\circ)-\sin 16^\circ\cos 46^\circ=\sin 46^\circ\cos 16^\circ-\cos 46^\circ\sin 16^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

4. C 由题知，$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}c=\sqrt{3}$，$\therefore c=1$，$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，由椭圆的定义知$|AF_1|+|AF_2|=2a=4$，$\therefore\triangle AF_1F_2$的周长为$4+2=6$.

5. B 若$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$；若$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，当$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$时，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(0,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$成立，但$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

6. C 易知$y=x+\frac{4}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{2},6\right)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减，$[2,6)$上单调递增. 当$x=2$时，$y=x+\frac{4}{x}=4$；当$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2}+8$；当$x=6$时，$y=x+\frac{4}{x}=6+\frac{2}{3}$；所以$f(x)\in\left[4,\frac{17}{2}\right]$，则函数$f(x)$的值域为$\{4,5,6,7,8\}$.

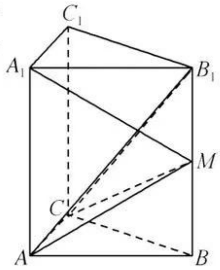
7. D 由PC为球O的直径可知，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，即$AC=BC=1$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，即$\triangle ABC$外接圆的半径$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为球O的半径$R=1$，所以点O到平面ABC的距离$d=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即顶点$P$到平面$ABC$的距离为$2d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

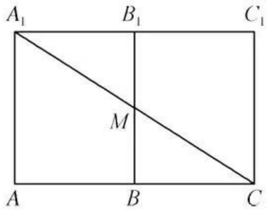
8. C 当$x>0$时，$\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，所以当$x>0$时，$xf'(x)+f(x)>0$，令$F(x)=xf(x)$，则当$x>0$时，$F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$，故$F(x)=xf(x)$在$x>0$时，单调递增，又因为$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上为偶函数，所以$F(x)=xf(x)$在$\mathbf{R}$上为奇函数，故$F(x)=xf(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，因为$f(2)=1$，所以$F(2)=2f(2)=2$，当$x>\frac{1}{2}$时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$可变形为$(2x-1)f(2x-1)<2$，即$F(2x-1)<F(2)$，因为$F(x)=xf(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$2x-1<2$，解得$x<\frac{3}{2}$，故$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$；当$x<\frac{1}{2}$时，$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$可变形为$(2x-1)f(2x-1)>2$，即$F(2x-1)>F(2)$，因为$F(x)=xf(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$2x-1>2$，解得$x>\frac{3}{2}$，故无解. 综上不等式$f(2x-1)<\frac{2}{2x-1}$的解集为$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

9. AC 二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式通项为$T_{k+1}=C_6^k\cdot(\sqrt{x})^{6-k}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^k=C_6^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot x^{3-\frac{3}{2}k}$. 令$3-\frac{3}{2}k=0$，可得$k=2$，故常数项是$C_6^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$，A正确；各项的系数和是$\left(1-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，B错误；展开式共7项，第4项二项式系数最大，C正确；奇数项二项式系数和为$2^5=32$，D错误.

10. BCD 因为成绩落在区间$[90,100]$内的人数为40，所以$n=\frac{40}{0.04\times 10}=100$，故A错误；由$(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times 10=1$，得$x=0.030$，故B正确；学生成绩平均分为：$0.005\times 10\times 55+0.010\times 10\times 65+0.015\times 10\times 75+0.030\times 10\times 85+0.040\times 10\times 95=84$，故C正确；因为$20000\times(0.04+0.03)\times 10=14000$，，故D正确.

11. ACD　因为 $AA_1\perp AC$，$BA\perp AC$，且 $AA_1\cap BA=A$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，又 $A_1M\subset$ 平面 AA_1B_1B，故 $AC\perp A_1M$，故 A 正确；BB_1 与 CM 的夹角即为异面直线 AA_1，CM 夹角，故异面直线 AA_1，CM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$；B 错误；由图知，平面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC，一个五面体和一个四面体，C 正确；将平面 AA_1B_1B 和平面 CC_1B_1B 展开，展开为一个平面，如下图，当 A_1，M，C 共线时，A_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{106}$，故 D 正确.





12. ACD　由题可得，抛物线的焦点坐标为 $F(0,2)$. 直线 AB：$y=x+2$，与抛物线 $x^2=8y$ 联立得 $y^2-12y+4=0$，所以 $y_1+y_2=12$，所以 $|AB|=y_1+y_2+4=12+4=16$，故 A 正确；设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{8}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{8}\right)$，由 $x^2=8y$，所以 $y'=\frac{x}{4}$，所以 AP：$y-\frac{x_1^2}{8}=\frac{x_1}{4}(x-x_1)$，即为 $y=\frac{x_1x}{4}-\frac{x_1^2}{8}$，同理可得 BP：$y=\frac{x_2x}{4}-\frac{x_2^2}{8}$，由 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{4}x-\frac{x_1^2}{8},\\ y=\frac{x_2}{4}x-\frac{x_2^2}{8},\end{cases}$ 解得 $y_P=\frac{x_1x_2}{8}$，由题意可知 AB 斜率存在，设 AB：$y=kx+2$，联立 $\begin{cases}x^2=8y,\\ y=kx+2\end{cases}$ 可知 $x^2-8kx-16=0$，$x_1x_2=-16$，所以 $y_P=-2$，所以点 P 在直线 $y=-2$ 上，故 B 错误；因为 $k_{AP}=\frac{x_1}{4}$，$k_{BP}=\frac{x_2}{4}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{x_1x_2}{16}=-1$，所以 $AP\perp BP$，故 C 正确；因为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)$，即为 $P(4k,-2)$，所以 $|PF|=\sqrt{16k^2+16}=4\sqrt{k^2+1}$，因为 $|AB|=y_1+y_2+4=8k^2+8$，所以 $\frac{|AB|+1}{|PF|}=\frac{8k^2+9}{4\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{4\sqrt{k^2+1}}$，令 $t=\sqrt{k^2+1}\geqslant 1$，则原式 $=2t+\frac{1}{4t}$. 因为函数 $y=2t+\frac{1}{4t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t=1$，即 $k=0$ 时取到最小值，其最小值为 $\frac{9}{4}$，故 D 正确.

13. $x-y-1=0$　$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，切线方程为 $y=x-1$，即 $x-y-1=0$.

14. -1　由题知直线过圆心 $(1,1)$，故 $2\times1-1+a=0$，$a=-1$.

15. $\frac{1}{2}$　该人对弈结果的所有可能情形：负负负、负和负、和负负、和和负、负负胜、负和胜、和负胜、和和胜. 故“仅和了 1 局”的概率为 $\frac{1}{2}$.

16. 38　当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，$a_1=\frac{1}{a_1}$，$a_1^2=1$，$\because a_n>0$，$\therefore a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，$\therefore 2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，$S_n+S_{n-1}=\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，$\therefore S_n^2-S_{n-1}^2=1$，$\therefore\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列，$\therefore S_n^2=n$，$\because a_n>0$，$\therefore S_n>0$，$S_n=\sqrt{n}$，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}$，又 $n>1$ 时，$\frac{2}{2S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ 令 $S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{100}}$，$S>2[(\sqrt{401}-\sqrt{400})+(\sqrt{400}-\sqrt{99})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]=2(\sqrt{401}-1)>38$，$S<2[(\sqrt{400}-\sqrt{399})+(\sqrt{399}-\sqrt{398})+\cdots+(\sqrt{2}-1)]+1=2(\sqrt{400}-1)+1=39$，即 $38<S<39$，从而 $[S]=38$.

17. 解：(1)由已知得 $(a_1+3d-2)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$，$a_1=d^2-3d+1$，…………………………………… 2 分

又因为 $a_1=1$，所以 $d^2-3d+1=1$，解得 $d=3$ 或 $d=0$（舍去），…… 4分

所以 $a_n=3n-2$. …… 5分

（2）由（1）得 $b_n=3^{3n-3}$，因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{3^{3(n+1)-3}}{3^{3n-3}}=27$， …… 8分

所以$\{b_n\}$是以 $b_1=1$ 为首项，以 27 为公比的等比数列，所以 $S_n=\frac{1}{26}(27^n-1)$. …… 10分

18. 解：（1）由正弦定理及 $c\sin A=\sqrt{3}a+\sqrt{3}a\cos C$，得 $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos C$. …… 2分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore \sin C=\sqrt{3}(1+\cos C)$， …… 3分

$\therefore 2\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …… 4分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$\therefore C-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. …… 6分

（2）由题意可知 $\angle ADB=\frac{5\pi}{6}$. …… 7分

由余弦定理知 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$， …… 8分

故 $12\geqslant 2AD\cdot BD+\sqrt{3}AD\cdot BD$，即 $AD\cdot BD\leqslant\frac{12}{2+\sqrt{3}}=12(2-\sqrt{3})$，当 $AD=BD=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 时，等号成立.

…… 10分

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\cdot\sin\angle ADB\leqslant\frac{1}{2}\times 12\times(2-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}-9$，

即$\triangle ABD$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}-9$. …… 12分

19. 解：（1）根据频数分布表可知，单株质量落在[27.5，33.5)的概率为 $P=\frac{3+3}{50}=0.12$. …… 3分

（2）样本平均数 $\overline{X}=0.08\times14+0.16\times17+0.20\times20+0.24\times23+0.20\times26+0.06\times29+0.06\times32=22.22$，

这 50 株农作物质量的样本平均数为 22.22. …… 7分

（3）依题意 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，因为 $\mu=\overline{X}=22.22$，$\sigma^2=S^2=22.2516$，$\sigma\approx4.72$，

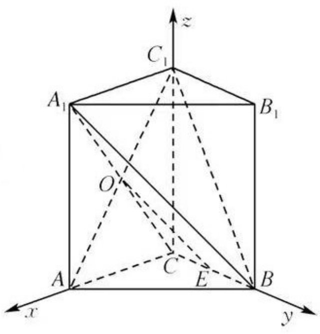
所以 $P(22.22-4.72<X\leqslant22.22+4.72)=0.6826$，所以 $P(X<26.94)=0.5+\frac{0.6826}{2}=0.8413$. … 12分

20. 解：（1）证明：由题易知，该三棱柱为直三棱柱，所以侧面 AA_1C_1C 为矩形，可得 O 为 A_1C 的中点，

又由 E 为 BC 的中点，可得 $A_1B/\!/OE$.

因为 $OE\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $OE/\!/$ 平面 A_1BC_1. … 4分

（2）由题可以 CA，CB，CC_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



则 $O(1,0,2)$，$E(0,1,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,0,4)$，

$\overrightarrow{OE}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-2,0,4)$，…… 7分

设平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -2x+4z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=2$，$y=2$，$\therefore\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，…… 10分

设直线 OE 与平面 ABC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OE},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. …… 12分

21. 解：（1）因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，$c^2=a^2+b^2$，

所以 $5a^2=a^2+b^2$，$4a^2=b^2$，$\frac{b}{a}=2$， …… 2分

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$. ………………………………………… 3分

(2)存在符合题意的双曲线,

设双曲线的两条渐近线分别为 $l_1: y=2x, l_2: y=-2x$,双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$,

依题意得直线 l 的斜率不为零,

因此设直线 l 的方程为 $x=my+t, -\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}, t>0$, ………………………………………… 5分

设直线 l 交 x 轴于点 $C(t,0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases} x=my+t, \\ y=2x, \end{cases}$ 得 $y_1=\frac{2t}{1-2m}$,同理得 $y_2=\frac{-2t}{1+2m}$. ………………………………………… 6分

由△OAB 的面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=8$,

得$\frac{1}{2}t\left|\frac{2t}{1-2m}+\frac{2t}{1+2m}\right|=8$,

即 $t^2=4|1-4m^2|=4(1-4m^2)>0$,(1) ………………………………………… 8分

联立$\begin{cases} x=my+t, \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1, \end{cases}$ 得$(4m^2-1)y^2+8mty+4(t^2-a^2)=0$,,

因为 $4m^2-1<0$,所以,直线 l 与双曲线只有一个公共点当且仅当 $\Delta=0$,

即 $\Delta=64m^2t^2-16(4m^2-1)(t^2-a^2)=0$,

化简得 $4m^2a^2+t^2-a^2=0$, ………………………………………… 10分

将(1)式代入可得 $4m^2a^2+4(1-4m^2)-a^2=0$,

$(a^2-4)(4m^2-1)=0$,

解得 $a^2=4$, ………………………………………… 11分

因此双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$,

因此,存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线,双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ……………… 12分

22. 解:(1)$a=0$ 时,$f(x)=(x-1)e^x, f'(x)=xe^x$, ………………………………………… 1分

令 $f'(x)>0$,得 $x>0$;令 $f'(x)<0$,得 $x<0$, ………………………………………… 2分

∴函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$;单调递减区间为$(-\infty,0)$. ………………………………………… 3分

(2)$f(x)=(x-a-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+a^2x$,

$f'(x)=(x-a)e^x-ax+a^2=(x-a)(e^x-a)$, ………………………………………… 4分

当 $a=0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,无极值. ………………………………………… 5分

当 $a<0$ 时,$f(x)$在$(a,0)$上单调递增,在$(-\infty,a)$上单调递减. ………………………………………… 6分

∴$f(x)$在 $x=a$ 处取得极小值,∴$f(a)=-e^a+\frac{1}{2}a^3<-e^a-1$,∴$a<-\sqrt[3]{2}$. ………………………… 7分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=a$(正值舍去),或 $x=\ln a, 0<a<1$.

$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递增,在$(\ln a,0)$上单调递减,

∴$f(x)$在 $x=\ln a$ 处取得极大值. ………………………………………… 9分

设 $n(a)=f(\ln a)=(\ln a-a-1)a-\frac{1}{2}a\ln^2 a+a^2\ln a=a\ln a(1-\frac{1}{2}\ln a+a)-a^2-a$,

$n'(a)=(1+\ln a)(1-\frac{1}{2}\ln a+a)+a\ln a(1-\frac{1}{2a})-2a-1=-\frac{1}{2}\ln^2 a+2a\ln a-a$.

∵$0<a<1$,∴$\ln a<0$,从而有 $n'(a)<0$,

∴$n(a)$在$(0,1)$上单调递减,∴$n(a)>n(1)=-2>-e^a-1$,∴$0<a<1$ 不合题意. …………………… 11分

当 $a\geqslant 1$ 时,$\ln a\geqslant 0$,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,此时 $f(x)$在$(-\infty,0)$上无极值,不合题意.

综上,a 的取值范围为$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$. ………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。