2023—2024 学年度（上）省六校高三年级期初考试数学试题

考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|2x<1\}$，$B=\{x|0<2x<5\}$，则 $A\cup B=$

A．$\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\right\}$　B．$\{x|x<2\}$　C．$\left\{x\middle|x<\frac{5}{2}\right\}$　D．$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$

2.已知复数 $z(1-i)=i$，则下面关于复数 z 的命题正确的是

A．$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$　B．复数 z 的虚部与实部互为相反数

C．$|z|=1$　D．复数 z 对应的点在第一象限

3.果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　B．$ab<b^2$　C．$-ab<-a^2$　D．$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

4.已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x-1 & x<0\\ \log_3(x+1) & x\geq 0\end{cases}$，若 $f(a)=2$，则 $f(a+1)=$

A．$\log_3 10$　B．$\log_3 5$　C．$\log_3 2$　D．1

5.已知函数 $f(x)$ 的图象如图 1 所示，则图 2 所表示的函数是

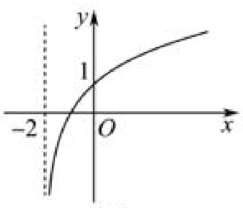

图1

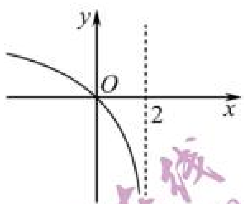

图2

A．$1-f(x)$　B．$-f(2-x)$　C．$f(-x)-1$　D．$1-f(-x)$

6. 为纪念我国伟大数学家祖冲之在圆周率上的贡献，国际上把 3.1415926 称为“祖率”，某教师为了增加学生对“祖率”的印象，以“祖率”为背景设计如下练习：让同学们把小数点后的 7 位数字 1,4,1,5,9,2,6 进行随机排列，整数部分不变，那么可以得到小于 3.14 的不同数有（　　）个

A. 120　B. 240　C. 480　D. 720

7. 黄山市歙县三阳镇叶村历史民俗“叠罗汉”已被列入省级非物质文化遗产保护项目，至今已有 500 多年的历史，表演时由二人以上的人层层叠成各种样式，魅力四射，光彩夺目，好看又壮观.小明同学在研究数列 $\{a_n\}$ 时，发现其递推公式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,(n\in\mathrm{N}^*)$ 就可以利用“叠罗汉”的思想来处理，即 $\begin{aligned}&a_3=a_1+a_2\\&a_4=a_3+a_2=a_1+a_2+a_2\\&a_5=a_4+a_3=a_1+a_2+a_2+a_3\\&\cdots\cdots\end{aligned}$，如果该数列 $\{a_n\}$ 的前两项分别为 $a_1=1,a_2=2$，其前 n 项和记为 S_n，若 $a_{2023}=m$，则 $S_{2021}=$

A. $m-2$　B. $\dfrac{2m-1}{2}$　C. $m+2$　D. $2m$

8. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，且满足 $f'(x)-2f(x)<0$，且 $f(0)=1$，则

A. $\mathrm{e}^2f(-1)<1$　　B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<\mathrm{e}$

C. $f(1)>\mathrm{e}^2$　　D. $f(1)>\mathrm{e}f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 月亮公转与自转的周期都大约为 27 天，阴历是按月亮的月相周期安排的历法，人们根据长时间的观测，统计了月亮出来的时刻 y（简称“月出时刻”，单位：h）与阴历日数 x（$x\in\mathrm{N}^*$，且 $x\le 30$）的有关数据如表所示，并且根据表中数据，求得 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$.其中，阴历 22 日是分界线，从阴历 22 日开始月亮就要到第二天（即 23 日 0：00）才出来.则（　）

x	2	4	7	10	15	22
y	8.1	9.4	12	14.4	18.5	24

A. $\bar{x}=10$，$\bar{y}=14.4$　　B. $\hat{a}=6.8$

C. 预报月出时刻为 16h 的那天是阴历 13 日

D. 预报阴历 27 日的月出时间为阴历 28 日早上 4：00

10. 若关于 x 的不等式 $x^2-(m+3)x+3m<0$ 的解集中恰有 3 个整数，则实数 m 的取值可以是

A. $-\dfrac{13}{2}$　B. $-\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{13}{2}$

11.已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(1+x)=-f(1-x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2+x-2$，则下列结论正确的是

A．$f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

B．$f(2021)+f(2022)=-2$

C．函数 $y=f(x)-\log_2(x+1)$ 有 3 个零点

D．当 $x\in[3,4]$ 时，$f(x)=x^2-9x+18$

12. 设 $a>1,b>1$，且 $ab-(a+b)=1$，那么

A．$a+b$ 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$

B．$a+b$ 有最大值 $(\sqrt{2}+1)^2$

C．ab 有最大值 $3+2\sqrt{2}$

D．ab 有最小值 $3+2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\left(ax^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 展开式中的常数项为 80，则实数 $a=$__________.

14. 已知函数 $f(x^2+1)$ 的定义域为 $[1,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\lg(x-2)}$ 的定义域为________.

15. 已知过点 $P(a,1)$ 可以作曲线 $y=\ln x$ 的两条切线，则实数 a 的取值范围是________.

16. 已知集合 $A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，将 $A\cup B$ 中的所有元素按从小到大的顺序排列构成一个数列 $\{a_n\}$，设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则使得 $S_n>1000$ 成立的最小的 n 的值为____________.

四、解答题:本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 若数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为调和数列.若实数 a、b、c 依次成调和数列，则称 b 是 a 和 c 的调和中项.

(1)求 $\dfrac{1}{3}$ 和 1 的调和中项；

(2)已知调和数列 $\{a_n\}$，$a_1=6$，$a_4=2$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 飞盘运动是一项入门简单，又具有极强的趣味性和社交性的体育运动，目前已经成为了年轻人运动的新潮流.某俱乐部为了解年轻人爱好飞盘运动是否与性别有关，对该地区的年轻人进行了简单随机抽样，得到

如下列联表:

性别	飞盘运动		合计
	不爱好	爱好	
男	6	16	22
女	4	24	28
合计	10	40	50

(1)在上述爱好飞盘运动的年轻人中按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从这 10 人中随机选取 3 人访谈，记参与访谈的男性人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为爱好飞盘运动与性别有关联？如果把上表中所有数据都扩大到原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用独立性检验推断爱好飞盘运动与性别之间的关联性，结论还一样吗？请解释其中的原因.

附: $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.01	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

19.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+x(a\in\mathbf{R})$

（1）若函数 $f(x)$ 存在两个极值点，求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)\geq x\ln x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的最小值.

20. 2023 年 4 月 23 日是第 28 个"世界读书日".为了倡导学生享受阅读带来的乐趣、尊重和保护知识产权，立德中学举办了一次阅读知识竞赛.初赛中每支队伍均要参加两轮比赛，只有两轮比赛均通过的队伍才能晋级.现有甲、乙两队参赛，初赛中甲队通过第一轮和第二轮的概率均为$\frac{3}{4}$，乙队通过第一轮和第二轮的概率分别为$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，且各队各轮比赛互不影响.

（1）记甲、乙两队中晋级的队伍数量为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）经过激烈的比拼，甲、乙两队成功进入决赛争夺冠军.决赛共有两道抢答题.第一题中，某支队伍若抢到并答对则加 10 分，若抢到但答错则对方加 10 分.第二题中，某支队伍若抢到并答对则加 20 分，若抢到但答错则对方加 20 分.最终得分高的队伍获胜.假设两支队伍在每一题中抢到答题权的概率均为$\frac{1}{2}$，且每一题答对的概率分别与初赛中通过对应轮次的概率相等.各队各题作答互不影响.已知甲队获得了冠军，计算第二题是由甲队抢到答题权的概率.

21. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．已知 $a_1=1$，$2na_n-2S_n=n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(1)求证：数列$\{a_n\}$是等差数列；

(2)设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，且 $T_n=2^n-1$，令 $c_n=\frac{a_n^2}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 R_n．

22. 已知函数 $f(x)=x\ln x-m(x-1)$，且 $f(x)\geq 0$.

（Ⅰ）求实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）设 k 为整数，且对任意正整数 n ，不等式 $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})\cdots\cdots(1+\frac{1}{3^n})<k$ 恒成立，求 k 的最小值；

（Ⅲ）证明：$(\frac{2023}{2024})^{2024}<\frac{1}{e}<(\frac{2023}{2024})^{2023}$

2023—2024 年高三上学期期初考试数学答案

1-4 CBDA　5-8 CBAB　9．AD　10．BD　11．ACD　12．AD

13．1　14．$(2,3)\cup(3,5]$　15．$(0,e)$　16．36

17．（1）设$\frac{1}{3}$和1的调和中项为b，依题意得：3、$\frac{1}{b}$、1成等差数列，

所以$\frac{1}{b}=\frac{3+1}{2}=2$，解得：$b=\frac{1}{2}$，

故$\frac{1}{3}$和1的调和中项为$\frac{1}{2}$；　5 分

（2）依题意，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，设其公差为$d$，

则$3d=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\Rightarrow d=\frac{1}{9}$，

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}(n-1)=\frac{2n+1}{18}$，

故$a_n=\frac{18}{2n+1}$．　10 分

18．（1）样本中爱好飞盘运动的年轻人中男性 16 人，女性 24 人，比例为$4:6$，

按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，则抽取男性 4 人，女性 6 人．

随机变量X的取值为:$0,1,2,3$．

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$，

随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量X的数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. 6 分

（2）零假设为H_0:爱好飞盘运动与性别无关联.

根据列联表重的数据，经计算得到$\chi^2=\frac{50\times(6\times24-4\times16)^2}{10\times40\times22\times28}\approx1.299<6.635=x_{0.01}$,

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，因此可以认为H_0成立，即认为爱好飞盘运动与性别无关联.

列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍后，

$$\chi^2=\frac{500\times(60\times240-40\times160)^2}{100\times400\times220\times280}\approx12.99>6.635=x_{0.01},$$

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，推断H_0成立，即认为爱好飞盘运动与性别有关联. 12 分

19．因为$f(x)=x^3+ax^2+x(a\in R)$，

所以$f'(x)=3x^2+2ax+1$

因为函数$f(x)$存在两个极值点，

所以$3x^2+2ax+1=0$有两个不同的解，

所以$4a^2-12>0$，解得$a<-\sqrt{3}$或$a>\sqrt{3}$ 5 分

$f(x)\geq x\ln x+x$在$(0,+\infty)$恒成立，即$x^2+ax\geq\ln x\Rightarrow a\geq\frac{\ln x}{x}-x$恒成立，

令$g(x)=\frac{\ln x}{x}-x$，则$a\geq g(x)_{\max}$

因为$g'(x)=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}$，

设$h(x)=1-\ln x-x^2\Rightarrow h(1)=0$，

$y=-\ln x, y=1-x^2$在$(0,+\infty)$上都递减，

所以$h(x)=1-\ln x-x^2$在$(0,+\infty)$上递减，

所以，当$0<x<1$时，$h(x)>0$，此时$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,1)$上递增，

当$x>1$时，$h(x)<0$，此时$g'(x)<0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上递减，

所以$g(x)_{\max}=g(1)=-1$，

所以$a\ge -1$，即$a_{\min}=-1$ 12 分

20 解：（1）设“甲队晋级”为事件M，“乙队晋级”为事件N，

可得$P(M)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$，$P(N)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$，

则随机变量X的可能取值为$0,1,2$，

可得$P(X=0)=\left(1-\frac{9}{16}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{21}{80}$；$P(X=1)=\left(1-\frac{9}{16}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{9}{16}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{41}{80}$.

$P(X=2)=\frac{9}{16}\times\frac{2}{5}=\frac{9}{40}$.

所以随机变量X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{21}{80}$	$\frac{41}{80}$	$\frac{9}{40}$

则期望$E(X)=0\times\frac{21}{80}+1\times\frac{41}{80}+2\times\frac{9}{40}=\frac{77}{80}$. 6 分

（2）由题意，第二题得分的那队获得胜利，

记事件$A=$“甲队获得冠军”，$B=$“第二题由甲队抢到答题权”，

可得$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{24}$，

又由$P(AB)=P(B)\cdot\frac{P(AB)}{P(B)}=P(B)P(A|B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$，

故$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{13}{24}}=\frac{9}{13}$.

12 分

21、1）$2na_n-2S_n=n^2-n$ ①，当$n\ge 2$时，$2(n-1)a_{n-1}-2S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)$ ②，

①－②得：$2na_n-2(n-1)a_{n-1}-2(S_n-S_{n-1})=n^2-(n-1)^2-n+(n-1)$，

即$2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$，所以$a_n-a_{n-1}=1$，$n\ge 2$且$n\in N^*$，

所以$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列． 5 分

（2）由（1）得，$a_n=n$．当$n=1$时，$b_1=T_1=1$；当$n\geq 2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2^{n-1}$；

又$b_1=1$满足上式，所以$b_n=2^{n-1}\left(n\in N^*\right)$．所以$c_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$，记数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$R_n$．

$R_n=\frac{1^2}{2^0}+\frac{2^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}$，①

$\frac{1}{2}R_n=\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$，②

①－②得$\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}$，③

则$\frac{1}{4}R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}$，④

③－④得$\frac{1}{4}R_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n^2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^n}+\frac{n^2}{2^{n+1}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}=3-\frac{n^2+4n+6}{2^{n+1}}$，所以

$R_n=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$． 12 分

22．（1）$\because f(x)=x\left(\ln x-m+\frac{m}{x}\right)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立

$\therefore \ln x-m+\frac{m}{x}\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立

设$g(x)=\ln x-m+\frac{m}{x}, g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}=\frac{x-m}{x^2}$

① 当$m\leq 0$时，$g'(x)>0$恒成立

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$g(1)=0$

$\therefore x\in(0,1)$时，$g(x)<0$不符合题意，舍去

② 当$m>0$，令$g'(x)>0$，则$x>m$，令$g'(x)<0$，则$0<x<m$

$\therefore g(x)$在$(0,m)$上单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增

$\therefore g(x)_{\min}=g(m)=\ln m-m+1\geq 0$

设$h(x)=\ln x-x+1, h'(x)=\frac{1-x}{x}$

$\therefore h'(x)>0$,则$0<x<1$;令$h'(x)<0$,则$x>1$

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$,即当$h(m)\geq 0$时，$m=1$

$\therefore m$的取值范围是$m=1$　　　　4 分

（2）由（1）知，$h(x)\le 0$,即 $\ln x\le x-1$在$(0,+\infty)$上恒成立(当且仅当$x=1$ 时等号成立)

令$x=1+\dfrac{1}{3^n}$,则 $\ln\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)<\dfrac{1}{3^n}$

$$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{3^1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\dots\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$$

即$(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{3^2})\cdots\cdots(1+\dfrac{1}{3^n})<\sqrt{e},k\ge\sqrt{e}$

又$\therefore 1+\dfrac{1}{3^1}>1$且$k\in z,\therefore k$的最小值为2　　　　8 分

（3）令 $x=1+\dfrac{1}{2023}$,则$\ln\left(1+\dfrac{1}{2023}\right)<\dfrac{1}{2023}$,即$\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{2023}>\dfrac{1}{e}$

令 $x=1-\dfrac{1}{2024}$,则$\ln\left(1-\dfrac{1}{2024}\right)<-\dfrac{1}{2024}$,即$\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{2024}<\dfrac{1}{e}$

$\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{2024}<\dfrac{1}{e}<\left(\dfrac{2023}{2024}\right)^{2023}$　　　　12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。