绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题卷

（银川一中第二次模拟考试）

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.作答时，务必将答案写在答题卡上.写在本试卷及草稿纸上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，满分60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|-1\le x\le 3\}$，$B=\{x|y=\ln(4-x^2)\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$　　B. $[-1,2)$

C. $[-1,3]$　　D. $(-2,3]$

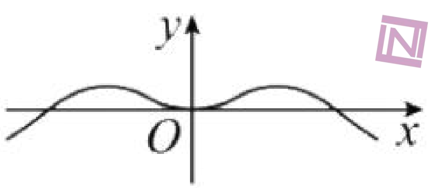
2.已知向量 $\vec{a}=(2,-3)$，$\vec{b}=(1,2)$，$\vec{c}=(9,4)$，若 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$，则 $m+n=$（　　）

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

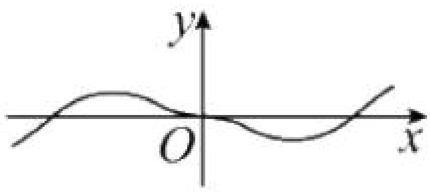
3.某单位职工老年人有60人，中年人有100人，青年人有40人，为了了解职工的健康状况，用分层抽样的方法从中抽取10人进行体检，则应抽查的老年人的人数为（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

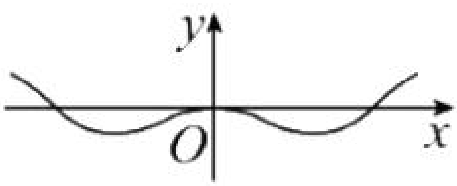
4.函数 $f(x)=\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的部分图象大致形状是（　　）



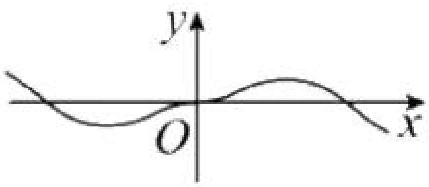
A.



B.



C.

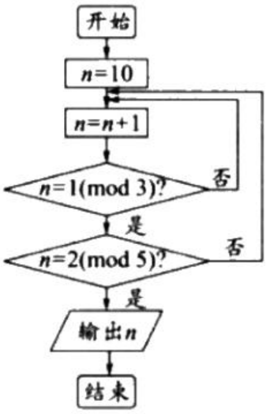


D.

5.从中、乙、丙、丁四名同学中选2人参加数学竞赛，则被选中的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6.若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n，则记为 $N=n(\mathrm{mod}\,m)$，例如 $10=2(\mathrm{mod}\,4)$.如图所示程序框图们算法源于我国古代闻名中外的《中国剩余定理》.执行该程序框图，则输出的 $n=$（　　）



A.23　　　　B.22　　　　C.21　　　　D.20

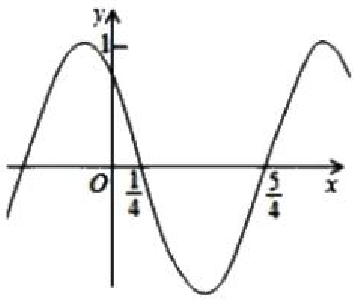
7.若实数 x，y 满足 $x\le y\le 2x+3$，则 $x+y$ 的最小值为（　　）

A.-5　　　　B.-6　　　　C.-7　　　　D.-8

8.直线 $kx+y-1+4k=0$（$k\in\mathbf{R}$）与圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ 的位置关系为（　　）

A.相离　　　　B.相切　　　　C.相交　　　　D.不能确定

9.函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　　）



A.$\left[k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　　　B.$\left[2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

C.$\left[k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　　　D.$\left[2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

10.设数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，$\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，则

$a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=$（　　）

A.1033　　　　B.1034　　　　C.2057　　　　D.2058

11.已知焦点在 x 轴上的双曲线，一条渐近线的倾斜角是另一条渐近线的倾斜角的 5 倍，则双曲线的离心率是（　　）

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B.2　　　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

12.如图，生活中有很多球缺状的建筑.球被平面截下的部分叫做球缺，截面叫做球缺的底面，球缺的曲面部分叫做球冠，垂直于截面的直径被截后的线段叫做球缺的高.球冠面积公式为$S=2\pi RH$，球缺的体积公式为$V=\frac{1}{3}\pi\left(3R-H\right)H^{2}$，其中$R$为球的半径，$H$为球缺的高.现有一个球被一平面所截形成两个球缺，若两个球冠的面积之比为1:2，则这两个球缺的体积之比为（　　）

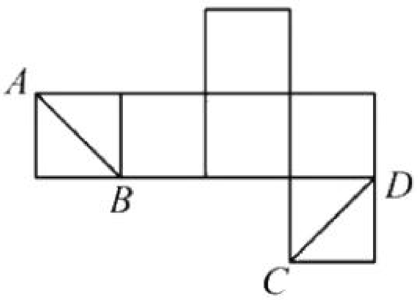
A. $\dfrac{1}{9}$　　　　B. $\dfrac{11}{20}$　　　　C. $\dfrac{7}{20}$　　　　D. $\dfrac{3}{10}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知复数$z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，i为虚数单位，则$|z|=$______.

14.已知函数$f\left(x\right)=\left(m^{2}-m-1\right)x^{m^{2}-2m-2}$是幂函数，且为偶函数，则实数$m$=______.

15.如图是正方体的平面展开图，则在这个正方体中，异面直线AB与CD的夹角为______.



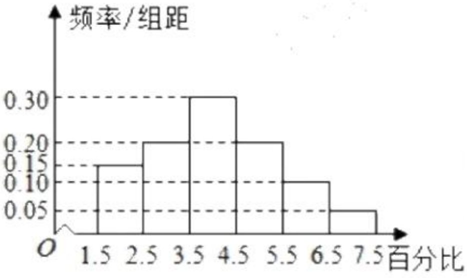
16.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$S_n=\lambda a_n-1$（λ为常数）.若数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=-n^2+9n-20$，且$b_{n+1}<b_n$，则满足条件的n的值为______.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

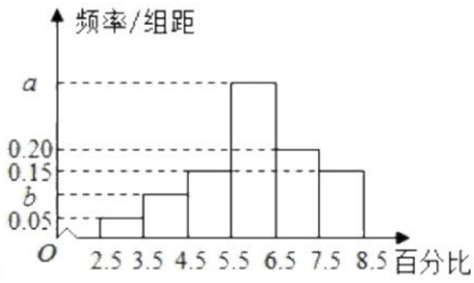
（一）必考题：共 60 分

17.（12 分）

为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度，进行如下试验：将 200 只小鼠随机分成 A 、B 两组，每组 100 只，其中 A 组小鼠给服甲离子溶液，B 组小鼠给服乙离子溶液.每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同.经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比.根据试验数据分别得到如图直方图：



甲离子残留百分比直方图



乙离子残留百分比直方图

记 C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”，根据直方图得到 $P(C)$ 的估计值为 0.70.

（1）求乙离子残留百分比直方图中 a，b的值；

（2）分别估计甲、乙离子残留百分比的平均值（同一组中的数据出该组区间中点值为代表）.

18.（12 分）

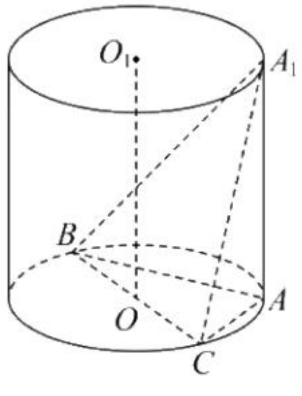
在 $\triangle ABC$ 中，角 A ，B ，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $2b\cos C=2a-c$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $a=8$，$c=5$，D 为 BC 的中点，求 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$ 的值.

19.（12 分）

如图，线段 AA_1 是圆柱 OO_1 的母线，BC 是圆柱下底面 $\odot O$ 的直径.



（1）弦 AB 上是否存在点 D，使得 O_1D // 平面 A_1AC，请说明理由；

（2）若 $BC=AA_1=2$，$\angle ABC=30°$，求点 A 到平面 A_1BC 们距离.

20.（12 分）

设曲线 C ：$mx^2+ny^2=1$（$m>0$，$n>0$）过 $M(2,3)$，$N\left(2\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$ 两点，直线 l：$y=k(x-2)$ 与曲线 C 交于 P，Q 两点，与直线 $x=8$ 交于点 R .

（1）求曲线 C 的方程；

（2）记直线 MP，MQ，MR 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，求证：$k_1+k_2=\lambda k_3$，其中 λ 为定值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+a\ln x+1$.

（1）若 $x=3$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）若 $f(x)\geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{\lambda}{t} \end{cases}$（$t$ 为参数，常数 $\lambda>0$），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的力程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$.

（1）写出 C 的极坐标方程和 l 的直角坐标方程；

（2）若直线 $\theta=\frac{\pi}{12}$（$\rho\in\mathbf{R}$）和 C 相交于 A，B 两点，以 AB 为直径的圆与直线 l 相切，求 λ 的值.

23.[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+3a|$.

（1）当 $a=-1$ 时，求不等式 $f(x)<4$ 的解集；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $(a-m)(a+m)=\frac{4}{n^2}$，求 $\frac{1}{m^2}+n^2$ 的最小值.

参考答案

一、选择题：（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	D	B	B	C	D	A	A	C

12. C【详解】设小球缺的高为 h_1，大球缺的高为 h_2，则 $h_1+h_2=2R$，②

由题意可得：$\frac{2\pi Rh_1}{2\pi Rh_2}=\frac{1}{2}$，即：$h_2=2h_1$，②

所以由①②得：$h_1=\frac{2R}{3}$，$h_2=\frac{4R}{3}$，

小球缺的体积$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{2R}{3}\right)\times\left(\frac{2R}{3}\right)^2=\frac{28\pi R^3}{81}$，

大球缺的体积$V_2=\frac{1}{3}\pi\left(3R-\frac{4R}{3}\right)\times\left(\frac{4R}{3}\right)^2=\frac{80\pi R^3}{81}$，

小球缺与大球缺体积之比为$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{28\pi R^3}{81}}{\frac{80\pi R^3}{81}}=\frac{7}{20}$.

二、填空题：（敏小题 5 分，共 20 分）

13. $\sqrt{5}$　　　　14.2　　　　15.60°

16. 5 或 6　【解析】因为$a_1=1$，且$S_n=\lambda a_n-1$（λ 为常数），

令$n=1$时，则$S_1=a_1=\lambda a_1-1=1$，解得$\lambda=2$，所以$S_n=2a_n-1$，

所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$（$n\geq 2$），所以$a_n=2a_{n-1}$，则$a_n=2^{n-1}$（$n\geq 2$），

当$n=1$时，$a_1=2^{1-1}=1$，满足上式，故$a_n=2^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$），因为$a_nb_n=-n^2+9n-20$，

所以$b_n=\frac{-n^2+9n-20}{2^{n-1}}$，（$n\in\mathbf{N}^*$），则$b_{n+1}-b_n=\frac{n^2-11n+28}{2^n}=\frac{(n-4)(n-7)}{2^n}<0$，解得$4<n<7$，

又因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n=5$或$n=6$.所以当$n=5$或$n=6$时，$b_{n+1}<b_n$.

三、解答题：

17.【答案】解：（1）C 为事件：“乙离子残留在体内的百分比不低于 5.5”，

根据直方图得到$P(C)$的估计值为 0.70.则由频率分布直方图得：$\begin{cases}a+0.20+0.15=0.7\\0.05+b+0.15=1-0.7\end{cases}$，

解得乙离子残留百分比直方图中$a=0.35$，$b=0.10$.

（2）估计甲离子残留百分比的平均值为：

$\overline{x_{甲}}=2\times0.15+3\times0.20+4\times0.30+5\times0.20+6\times0.10+7\times0.05=4.05$.

乙离子残留百分比的平均值为：

$\overline{x_{乙}}=3\times0.05+4\times0.1+5\times0.15+6\times0.35+7\times0.2+8\times0.15=6$.

18.【答案】解：（1）$\because 2b\cos C=2a-c$，结合余弦定理$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

可得 $2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2a-c$，整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$，所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）因为 $a=8$.在 $\triangle ABC$ 中，据余弦定理可得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos\dfrac{\pi}{3}=49$，故 $AC=7$.

又 D 是 BC 的中点，故 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$，

所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD$，故 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{7}{5}$.

19.【答案】解：【详解】（1）当点 D 为 AB 的中点时，O_1D // 平面 A_1AC，证明如下：

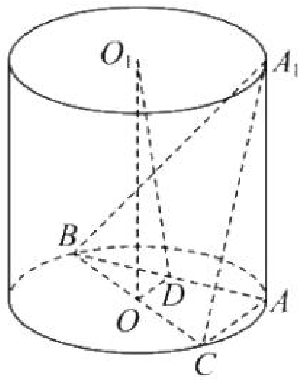
取 AB 的中点 D，连接 OD，$\because O$，D 分别为 BC，AB 的中点，则 OD // AC，

$OD\not\subset$ 平面 A_1AC，$AC\subset$ 平面 A_1AC，$\therefore OD$ // 平面 A_1AC，

又 $\because OO_1$ // AA_1，$OO_1\not\subset$ 平面 A_1AC，$AA_1\subset$ 平面 A_1AC，$\therefore OO_1$ // 平面 A_1AC，

$O_1O\cap OD=O$，O_1O，$OD\subset$ 平面 OO_1D，$\therefore$ 平面 OO_1D // 平面 A_1AC，

由于 $O_1D\subset$ 平面 OO_1D，故 O_1D // 平面 A_1AC.



（2）设距离为 d，由题可得 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$，

由等体积法得：$V_{A-A_1BC}=V_{A_1-ABC}$，解得距离 $d=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

20.【答案】解：（1）由已知得 $\begin{cases}4m+9n=1\\8m+6n=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{16}\\n=\dfrac{1}{12}\end{cases}$.所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

（2）易知 $R(8,6k)$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，整理得 $\left(4k^2+3\right)x^2-16k^2x+16\left(k^2-3\right)=0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{16\left(k^2-3\right)}{4k^2+3}$，

$$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1-3}{x_1-2}+\frac{y_2-3}{x_2-2}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}-3\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}\right)$$

$$=2k-3\times\frac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4}=2k-3\times\frac{\frac{16k^2}{4k^2+3}4}{\frac{16\left(k^2-3\right)}{4k^2+3}3k^2+4}=2k-1,$$

又 $k_3=\dfrac{6k-3}{8-2}=k-\dfrac{1}{2}$，$\therefore k_1+k_2=2k_3$，$\therefore \lambda$ 等于定值 2，得证.

21.【答案】解：（1）由题意知函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=x-(a+1)+\dfrac{a}{x}$，$\because x=3$ 是 $f(x)$ 的极值点，$\therefore f'(3)=3-(a+1)+\dfrac{a}{3}=0$，解得 $a=3$，

当 $a=3$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}$，当 x 变化时，

x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(1,3)$

极大值为 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$，极小值为 $f(3)=3\ln 3-\dfrac{13}{2}$.