

北海市 2021 年春季学期期末教学质量检测 · 高二数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. A 因为 $i^4=1$, 所以 $i^{2021}=(i^4)^{505}i=i$, 所以 $z=\frac{1}{2+i^{2021}}=\frac{1}{2+i}=\frac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$, 则 $\bar{z}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$, 所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内所对应的点为 $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, 位于第一象限. 故选 A.
2. D 从甲到丁分为两类, 第一类, 从甲过乙到丁分两步, 从甲地到乙地有 3 条路, 从乙地到丁地有 2 条路, 由分步乘法计数原理得, 从甲到丁有 6 种走法; 第二类, 从甲过丙到丁分两步, 从甲地到丙地有 2 条路, 从丙地到丁地有 4 条路, 由分步乘法计数原理得, 从甲到丁有 8 种走法, 再由分类加法计数原理得, 从甲到丁共有 $6+8=14$ 种走法. 故选 D.
3. A 设缺少的数值为 a , 则 $\bar{x}=\frac{22+23+24+25+26}{5}=24$, $\bar{y}=\frac{23+24+a+26+28}{5}=\frac{101+a}{5}$, 因为回归直线方程经过样本中心, 所以 $\frac{101+a}{5}=1.2 \times 24 - 3.8$, 解得 $a=24$. 故选 A.
4. C $\int_1^2 \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1) \Big|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$. 故选 C.
5. A $\because y=e^x+x, \therefore y'=e^x+1$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则切线 l 的斜率 $k=e^{x_0}+1=2$, 所以 $x_0=0$, 所以 $y_0=1$, 故切线 l 的方程为 $y-1=2x$, 即 $2x-y+1=0$. 故选 A.
6. D 将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入 $\rho^2 \cos \theta=1$ 得 $\rho^2=2$, 则 $|OA|=\rho=\sqrt{2}$.
7. B 因为随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{a}{3^{k-1}} (k=1, 2, 3, 4, 5)$, 所以 $\sum_{k=1}^5 \frac{a}{3^{k-1}}=a \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}}=1$, 解得 $a=\frac{81}{121}$, 所以 $P(X=k)=\frac{a}{3^{k-1}}=\frac{3^{5-k}}{121}$. 所以 $P(X \geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{3}{121}+\frac{1}{121}=\frac{4}{121}$. 故选 B.
8. C 由题意知正态分布图象关于直线 $x=4$ 对称, 故由 $P(\xi \leq 5)=0.89 \Rightarrow P(4 \leq \xi \leq 5)=0.89-0.5=0.39$, 因此 $P(3 \leq \xi \leq 4)=0.39$, 故有 $P(\xi \leq 3)=0.5-P(3 \leq \xi \leq 4)=0.5-0.39=0.11$.
9. B 设“抛掷两枚骰子, 两枚的点数之和为 6”为事件 A, “抛掷两枚骰子, 其中一枚的点数为 2”为事件 B, 则 $P(A)=\frac{5}{36}, P(AB)=\frac{2}{36}$, 所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}$. 故选 B.
10. C 由题目可推得, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=1296$, 所以 $n^2(n+1)^2=5184$, 所以 $n(n+1)=72$, 所以 $(n-8)(n+9)=0$, 解得 $n=8 (n=-9 \text{ 舍去})$. 故选 C.
11. B 因为 $f(x)=x^2-(a+2)x+a \ln x$ 既有极大值又有极小值, 且 $f'(x)=2x-a-2+\frac{a}{x}=0$ 有两个不相等的正实数解, 所以 $\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x}=(2x-a)(x-1)$ ($x>0$), 所以 $f'(x)=0$ 有两个不相等的正实数解, 所以 $\frac{a}{2}>0$, 且 $\frac{a}{2} \neq 1$, 解得 $a>0$, 且 $a \neq 2$. 故选 B.

12. D 由 $\frac{e^{a+1}}{b} = \frac{c-2}{d} = 1$, 可得 $b = e^{a+1}, d = c - 2$, 故 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 可理解为曲线 $y = e^{x+1}$ 上一点 (a, b) 与直线 $y = x - 2$ 上一点 (c, d) 间的距离的平方. 对于函数 $y = e^{x+1}$, 令 $y' = e^{x+1} = 1$, 故可得 $x = -1$, 即函数 $y = e^{x+1}$ 在 $(-1, 1)$ 处的切线方程为 $x - y + 2 = 0$, 切线方程与直线 $y = x - 2$ 平行, 则函数 $y = e^{x+1}$ 在 $(-1, 1)$ 处的切线方程与直线 $y = x - 2$ 之间的距离 $d = \frac{|2 - (-2)|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 故 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为 $d^2 = 8$.

故选 D.

13. $1-i \quad z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$, 则 $\bar{z} = 1-i$.

14. $21 \quad \left(3x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r (3x^3)^{7-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_7^r \cdot 3^{7-r} \cdot x^{21-\frac{7}{2}r}$, 令 $21 - \frac{7}{2}r = 0$ 得, $r = 6$, 所以 $\left(3x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项为 $C_7^6 \cdot 3^{7-6} = 21$.

15. $1 \quad C: \begin{cases} x = 1 + 2\cos \theta, \\ y = 3 + 2\sin \theta \end{cases}$ 消去 θ , 可得圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$, 因为圆心到直线 l 的距离 $d = 3$, 所以 $|PQ|_{\min} = 3 - 2 = 1$.

16. $\frac{27}{128} \quad$ 由 $X \sim B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 可知: $D(X) = n \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3n}{16} = \frac{3}{4}$, $\therefore n = 4$, $\therefore P(X=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$.

17. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = 2\cos \alpha, \\ y = \sqrt{3}\sin \alpha, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos \alpha, \\ \frac{y}{\sqrt{3}} = \sin \alpha, \end{cases}$ 所以 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 即曲线 C 的普通方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 2 分

由 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, 得 $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 1 = 0$, 又 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

所以 $x - y + 1 = 0$, 即直线 l 的直角坐标方程为 $x - y + 1 = 0$ 5 分

(2) 因为直线 l 经过点 $P(-1, 0)$, 且倾斜角是 45° ,

所以直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}).$ 7 分

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

将直线 l 的参数方程代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 整理得 $7t^2 - 6\sqrt{2}t - 18 = 0$, 所以 $\Delta = (6\sqrt{2})^2 - 4 \times 7 \times (-18) > 0, t_1 t_2 = -\frac{18}{7}$.

所以 $|PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \frac{18}{7}$ 10 分

18. 解: (1) 由 $220 + m = 400$, 得 $m = 180$.

由 $220 + 100 = n$, 得 $n = 320$.

由 $m+300=p$, 得 $p=180+300=480$.

由 $400+400=q$, 得 $q=800$ 6 分

注: m, n, p, q 的值, 求对三个给 5 分, 求对两个给 3 分, 只求对一个给 2 分.

(2) 因为 $K^2 = \frac{800 \times (220 \times 300 - 180 \times 100)^2}{400 \times 400 \times 320 \times 480} = 75 > 10.828$, 10 分

因此有 99.9% 的把握认为学生总成绩不好与数学成绩不好有关. 12 分

19. 解: (1) 随机变量 X 的可能取值有 0, 1, 2, 3, 且 X 服从超几何分布. 1 分

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84},$$

$$P(X=1) = \frac{C_6^1 C_3^2}{C_9^3} = \frac{3}{14},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_3^1}{C_9^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21}. \text{ 5 分}$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$

..... 6 分

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{84} + 1 \times \frac{3}{14} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{21} = 2. \text{ 8 分}$$

(2) 若甲没有通过预选赛, 则甲答对了 1 道或 0 道. 9 分

$$\text{所以甲没有通过预选赛的概率 } P = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{84} + \frac{3}{14} = \frac{19}{84}. \text{ 12 分}$$

20. 解: (1) $\bar{x} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = 15$ 1 分

$$\bar{y} = \frac{98+193+280+369+460}{5} = 280 \text{ 2 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 5 \times 98 + 10 \times 193 + 15 \times 280 + 20 \times 369 + 25 \times 460 = 25\,500 \text{ 3 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5^2 + 10^2 + 15^2 + 20^2 + 25^2 = 1\,375 \text{ 4 分}$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{25\,500 - 5 \times 15 \times 280}{1\,375 - 5 \times 15^2} = \frac{4\,500}{250} = 18 \text{ 6 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 280 - 18 \times 15 = 10 \text{ 7 分}$$

所以点击量 y 与发布时间 x 之间的回归直线方程为 $\hat{y} = 18x + 10$.

..... 8 分

(2) 令 $x=60$, 得 $\hat{y} = 18 \times 60 + 10 = 1\,090 > 1\,000$ 10 分

所以 1 小时后, 该公众号信息的点击量约为 1 090 次, 达到了宣传效果. 12 分

21. 解:(1)因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

代入 $y^2-4x-4=0$ 得 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta-4=0$,

所以抛物线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta-4=0$ 5 分

(2)将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入抛物线 C 的方程得 $\frac{3\rho^2}{4}-2\rho-4=0$,

则 $\rho_1+\rho_2=\frac{8}{3}, \rho_1\rho_2=-\frac{16}{3}$,

所以 $|\rho_1-\rho_2|^2=(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2=\frac{64}{9}+\frac{64}{3}=\frac{256}{9}$ 10 分

所以 $|\rho_1-\rho_2|=\frac{16}{3}$.

由 ρ 的几何意义,得 $|AB|=\frac{16}{3}$ 12 分

22. 解:(1) $\because f(x)=x^2\ln x$,

$\therefore f'(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$ 1 分

令 $f'(x)=0$, 则 $2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)=0$,

$\therefore x=0$ (舍) 或 $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$ 2 分

分析知, 当 $x\in\left(0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in\left(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$, 3 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增. 4 分

(2)据题意知, $a\leq\frac{x^2\ln x+1}{x}$ 对任意的 $x\in(0, +\infty)$ 成立. 5 分

令 $g(x)=\frac{x^2\ln x+1}{x}$, 则 $g'(x)=\frac{x^2\ln x+x^2-1}{x^2}$ 6 分

讨论:

当 $x\geq 1$ 时, $g'(x)\geq 0$; 7 分

当 $0<x<1$ 时, $g'(x)<0$, 8 分

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 9 分

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1$ 10 分

$\therefore a\leq 1$, 即所求实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$ 12 分