

2020-2021 学年度第二学期期末学业水平诊断

高二数学

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟。
2. 答卷前, 务必将姓名和准考证号填涂在答题卡上。
3. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 3\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$

- A. $\{x | x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 3\}$ C. $\{x | x \geq 1\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 3\}$

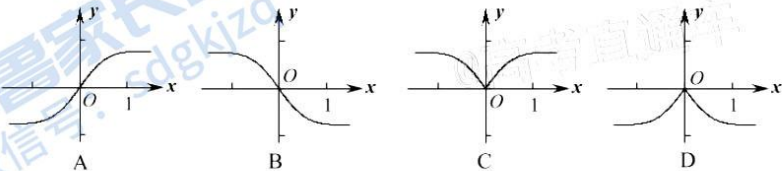
2. “ $\frac{1}{x} < 1$ ” 是 “ $x > 1$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ f(x-1), & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(2021) =$

- A. 2 B. 1 C. 0 D. 不确定

4. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{x^2 + 1}$ 的图象可能为



5. 若函数 $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2})$

高二数学试题 (第 1 页, 共 4 页)

6. 某种放射性物质在其衰变过程中, 每经过一年, 剩余质量约是原来的 $\frac{2}{3}$. 若该物质的剩

余质量变为原来的 $\frac{1}{4}$, 则经过的时间大约为 ($\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$)

- A. 2.74 年 B. 3.42 年 C. 3.76 年 D. 4.56 年

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(m) = f(n)$ 且 $n < m$, 则 $m-n$ 的最小值为

- A. 2 B. 3 C. $e^2 - 1$ D. e^2

8. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-1) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则不等式 $(2^x - 1)f(x) > 0$ 的解集为

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的有

- A. “ $\forall x \in (0, +\infty)$, $2^x > 1$ ” 的否定为 “ $\exists x \in (0, +\infty)$, $2^x \leq 1$ ”
B. “ $\forall x \in (0, +\infty)$, $2^x > 1$ ” 的否定为 “ $\exists x \in (-\infty, 0]$, $2^x \leq 1$ ”
C. “ $\exists x > 0$, $x^2 - x - 1 > 0$ ” 的否定为 “ $\forall x > 0$, $x^2 - x - 1 \leq 0$ ”
D. “ $\exists x > 0$, $x^2 - x - 1 > 0$ ” 的否定为 “ $\forall x \leq 0$, $x^2 - x - 1 \leq 0$ ”

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$, $g(x) = \lg(\sqrt{x^2+1} - x)$, 则

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数
B. 函数 $g(x)$ 为奇函数
C. 函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 0
D. 设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F(2a) + F(-1-a) < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = |x-a|$ ($a \in \mathbf{R}$), 则

- A. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减
B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
C. 若方程 $f(x) = g(x)$ 仅有 1 个实数根, 则 $0 < a < 4$
D. 当 $a < 0$ 或 $a > 4$ 时, 方程 $f(x) = g(x)$ 有 3 个实数根

高二数学试题 (第 2 页, 共 4 页)

12. 若函数 $g(x)$ 在区间 D 上有定义, 且对 $\forall a, b, c \in D$, $g(a), g(b), g(c)$ 均可作为一个三

角形的三边长, 则称 $g(x)$ 在区间 D 上为“M 函数”. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x + k$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ 上为“M 函数”, 则实数 k 的值可能为

- A. $4-e$ B. $e-1$ C. $2e-5$ D. $\frac{1}{4}e^2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \log_2 x}$ 的定义域为

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} -7x+2a, & x \geq 1 \\ x^2 - ax+1, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则实数 a 的取值范围为

15. 若函数 $y = 2e^x - 3$ 在 $x = 0$ 处的切线与 $y = \ln x + ax$ 的图象相切, 则实数 a 的值为

16. 已知函数 $f(x) = a - x^2$ ($0 < x < \sqrt{a}$) 在其图象上任意一点 $P(t, f(t))$ 处的切线, 与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 M, N 两点, 设 $\triangle OMN$ (O 是坐标原点) 的面积为 $S(t)$,

当 $t = t_0$ 时, $S(t)$ 取得最小值, 则 $\frac{\sqrt{a}}{t_0}$ 的值为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - \sin x$.

- (1) 当 $x < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 解关于 m 的不等式 $f(2m) > f(m-1)$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
(2) 讨论方程 $f(x) = a$ ($a \in \mathbf{R}$) 实数解的个数.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(4^x + k \cdot 2^x + 1)$ ($k \in \mathbf{R}$), $g(x) = x \ln 2$.

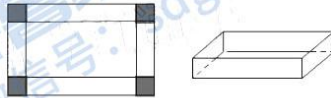
- (1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求 k 的取值范围;
(2) 若不等式 $f(x) < g(x)$ 有解, 求 k 的取值范围.

高二数学试题 (第 3 页, 共 4 页)

20. (12分) 如图, 将一张长为 a 、宽为 $\frac{5}{8}a$ 的矩形铁皮的四角分别裁去一个大小相同的小正方形, 然后折起, 可以做成一个无盖长方体容器. 设裁去的小正方形的边长为 x , 所得容器的体积为 V .

(1) 将 V 表示为 x 的函数 $V(x)$:

(2) x 为何值时, 容积 V 最大? 求出最大容积.



21. (12分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - x + m$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方, 求 m 的取值范围;

(2) 若存在正数 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = xe^{-x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 令 $g(x) = \frac{a}{f(x)} + \ln f(x)$ ($a \in \mathbf{R}$), 对任意 $x \geq 1$, $g(x) \geq -1$,

求 a 的取值范围.

2020-2021 学年度第二学期期末学业水平诊断

高二数学参考答案

一、单选题

DBAA CBB D

二、多选题

9. AC 10. BCD 11. ACD 12. BD

三、填空题

13. (0, 2] 14. [2, 3] 15. 1 16. $\sqrt{3}$

四、解答题

17. 解: (1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x + \sin x$, 2 分

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x) = f(-x) = -x + \sin x$ 4 分

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = (x - \sin x)' = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增. 6 分

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(2m) > f(m-1) \Leftrightarrow f(|2m|) > f(|m-1|)$.

所以 $|2m| > |m-1|$, 8 分

两边平方, 整理得 $(3m-1)(m+1) > 0$,

解得 $m < -1$ 或 $m > \frac{1}{3}$ 10 分

18. 解: (1) $f'(x) = x^2 - 4$ 2 分

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 2$ 3 分

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

..... 5 分

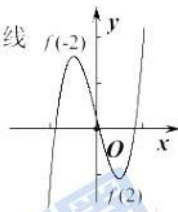
因此, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极大值, 且极大值为 $f(-2) = \frac{19}{3}$ 6 分

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值, 且极小值为 $f(2) = -\frac{13}{3}$ 7 分

(2) 方程 $f(x) = a$ 的实数解的个数, 即为函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 的交点的个数.9 分

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

结合 (1) 知 $f(x)$ 的大致图象如右图所示.



所以, 当 $a > \frac{19}{3}$ 或 $a < -\frac{13}{3}$ 时, 解为 1 个;10 分

当 $a = \frac{19}{3}$ 或 $a = -\frac{13}{3}$ 时, 解为 2 个;11 分

当 $-\frac{13}{3} < a < \frac{19}{3}$ 时, 解为 3 个.12 分

19. 解: (1) 要使 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 只需 $4^x + k \cdot 2^x + 1 > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立.2 分

令 $t = 2^x > 0$, 只需 $y = t^2 + kt + 1 > 0$ 在 $t > 0$ 上恒成立.

当 $-\frac{k}{2} \leq 0$, 即 $k \geq 0$ 时, $y(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增, 恒有 $y(t) > y(0) = 1 > 0$,

因此, 对任意 $k \geq 0$ 均成立.3 分

当 $-\frac{k}{2} > 0$, 即 $k < 0$ 时, $y(t)$ 在 $(0, -\frac{k}{2})$ 单减, $(-\frac{k}{2}, +\infty)$ 单增, 只需 $f(-\frac{k}{2}) > 0$,

即 $\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} + 1 > 0$, 解得 $-2 < k < 2$, 所以 $-2 < k < 0$5 分

综上, k 的取值范围为 $(-2, +\infty)$6 分

(2) 若不等式 $f(x) < g(x)$ 有解, 即 $\ln(4^x + k \cdot 2^x + 1) < x \ln 2 = \ln 2^x$,

可得 $0 < 4^x + k \cdot 2^x + 1 < 2^x$ 有解.7 分

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $4^x + k \cdot 2^x + 1 \rightarrow +\infty$, 所以, 对任意实数 k , 总存在 $x_0 > 0$, 使得

$4^{x_0} + k \cdot 2^{x_0} + 1 > 0$, 即 $4^x + k \cdot 2^x + 1 > 0$ 有解.8 分

由 $4^x + k \cdot 2^x + 1 < 2^x$ 可得, $k - 1 < -(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x})$9 分

令 $t = 2^x > 0$, $y = -t - \frac{1}{t}$, $y' = -1 + \frac{1}{t^2} = \frac{(1-t)(1+t)}{t^2}$10 分

显然当 $t \in (0, 1)$ 时, 函数单调递增, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, 函数单调递减,

所以当 $t = 1$ 时, y 取最大值 -2 , 11 分

所以 $k - 1 < -2$, 即 $k < -1$ 12 分

20. 解: (1) 由题意知, 长方体容器的长、宽、高分别为 $a - 2x$, $\frac{5}{8}a - 2x$, x ,

容器的体积 $V = (a - 2x)(\frac{5}{8}a - 2x)x$ 2 分

令 $a - 2x > 0$, $\frac{5}{8}a - 2x > 0$, $x > 0$, 可得 $0 < x < \frac{5}{16}a$ 4 分

故函数 $V(x) = (a - 2x)(\frac{5}{8}a - 2x)x = 4x^3 - \frac{13}{4}ax^2 + \frac{5}{8}a^2x$, $0 < x < \frac{5}{16}a$ 5 分

(2) 令 $V'(x) = 12x^2 - \frac{13}{2}ax + \frac{5}{8}a^2$ 6 分

令 $V'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{8}a$, $x_2 = \frac{5a}{12}$ (舍去). 8 分

x	$(0, \frac{1}{8}a)$	$\frac{1}{8}a$	$(\frac{1}{8}a, \frac{5}{16}a)$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	单调递增	极大值	单调递减

..... 9 分

因此, $x = \frac{1}{8}a$ 是函数 $V(x)$ 的极大值点, 相应的极大值 $V(\frac{1}{8}a) = \frac{9a^3}{256}$,

也是 $V(x)$ 在区间 $(0, \frac{5}{16}a)$ 上的最大值. 11 分

答: 截去的小正方形边长为 $\frac{1}{8}a$ 时, 容器的容积最大, 最大容积 $\frac{9a^3}{256}$ 12 分

21. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ 1 分

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

.....3 分

因此, 当 $x = 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = m - 1$.

.....4 分

由题意, $f(x)_{\min} > 0$,

.....5 分

即 $m - 1 > 0$, 解得 $m > 1$.

.....6 分

(2) 由 (1) 及 $f(x)$ 的单调性知, $0 < x_1 < 1 < x_2$.

.....7 分

构造函数 $g(x) = f(x) - f(2 - x)$, $0 < x < 1$.

.....8 分

则 $g'(x) = \ln x + \ln(2 - x) = \ln[1 - (x - 1)^2]$,

.....9 分

当 $0 < x < 1$ 时, $1 - (1 - x)^2 < 1$, $\ln[1 - (x - 1)^2] < 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.

.....10 分

因为 $x_1 < 1$, 所以 $g(x_1) > g(1) = 0$, 即 $f(x_1) > f(2 - x_1)$.

由题意 $f(x_2) = f(x_1)$, 所以 $f(x_2) > f(2 - x_1)$.

.....11 分

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$, 且单调递增, $x_2 > 1$, $2 - x_1 > 1$,

所以 $x_2 > 2 - x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$.

.....12 分

22. 解: (1) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

.....1 分

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$.

.....3 分

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 1)$, 单调减区间为 $(1, +\infty)$.

.....4 分

(2) 由题意知 $g(x) = \frac{ae^x}{x} - x + \ln x$.

.....5 分

于是 $g'(x) = \frac{ae^x(x-1)}{x^2} - 1 + \frac{1}{x} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} (a - \frac{x}{e^x})$,

.....6 分

由 (1) 知, 在 $[1, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) \in (0, \frac{1}{e}]$,

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) \leq 0$, 函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 取 $x_0 = e$, 显然 $e > 1$,

但 $g(e) = ae^{e-1} - e + 1 \leq 1 - e < -1$, 因此, $a \leq 0$ 不合题意.

.....8 分

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 结合 (1) 中 $f(x)$ 的单调性知, 存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $ae^{x_0} = x_0$,

此时 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$$g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{ae^{x_0}}{x_0} - x_0 + \ln x_0$$

$$= 1 - x_0 + \ln(ae^{x_0}) = 1 + \ln a \geq -1,$$

解得 $a \geq \frac{1}{e^2}$, 即 $\frac{1}{e^2} \leq a < \frac{1}{e}$; 10 分

当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) \geq 0$, 函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(1) = ae - 1 \geq -1$,

解得 $a \geq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{e}$;

综上所述, a 的取值范围 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索