参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】根据全称量词的否定规则，先改写量词，再否定结论，可得原命题的否定为“$\exists x<0, 2\,023^x-x^3+2\geqslant 0$”. 故选D项.

2. C 【解析】由 $B\subseteq A, A\cap C=\{3\}$，得 $0\in A$ 且 $3\in A$，当 $\begin{cases}a+2=0,\\ a^2+a-2=3\end{cases}$ 时，无解；当 $\begin{cases}a+2=3,\\ a^2+a-2=0\end{cases}$ 时，解得 $a=1$. 故选C项.

3. B 【解析】由 $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$，得 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$，当 a,b 均为负数时，显然 $\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{b}}$ 不成立，充分性不成立. 由 $\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{\sqrt{b}}>0$，得 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4>\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4$，即 $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$，必要性成立. 故选B项.

4. D 【解析】当 $x<1$ 时，$f(x)$ 的值域为 $\{0\}$，当 $1\leqslant x<2$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[2,3)$；当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1]$. 要使 $f(f(a))=1$，则 $f(a)=2$，所以 $a+1=2$，解得 $a=1$. 故选D项.

5. A 【解析】由题意可知 $a<0$，且 $-3+1=-\frac{b}{a}$，$-3\times 1=\frac{c}{a}$，所以 $b=2a, c=-3a$，所以 $cx^2+bx+a<0$ 化为 $3x^2-2x-1<0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<1$. 故选A项.

6. D 【解析】由题意可知 $-3\leqslant x\leqslant 1$，所以 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 1$，要使函数 $y=\frac{f(3-4x)}{\sqrt{x-1}}$ 有意义，则 $\begin{cases}-7\leqslant 3-4x\leqslant 1,\\ x-1>0,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant\frac{5}{2}$. 故选D项.

7. A 【解析】因为 $g(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 内是单调函数，且对于任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(g(x)+f(x))=1$，令 $g(x)+f(x)=c>0$（c 为常数），即 $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}+c(x>0)$. 令 $x=c$，得 $c^2-\frac{1}{c^2}+c=1$，即 $c^4-1+c^3-c^2=0$，则 $(c-1)[c^2(c+2)+c+1]=0$，解得 $c=1$. 故 $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}+1$. 易知 $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}+1$ 在 $[1,2]$ 上为增函数，所以 $1\leqslant g(x)\leqslant\frac{19}{4}$. 故选A项.

8. C 【解析】由题意可知 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(2-x)+f(2+x)=0$，所以 $f(x)=-f(2+x)$，则 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数. 由 $f(2)=0$ 可知，$f(0)=0$，则 $f(2)=f(4)=f(6)=\cdots=f(2\,022)=0$，所以 $g(2)=g(4)=g(6)=\cdots=g(2\,022)=0$，由 $g(23)=44$ 得，$22f(23)=22f(3)=-22f(1)=44$，所以 $f(1)=-2$，则 $f(3)=2$，所以 $g(1)+g(3)=0+2f(3)=4$，$g(5)+g(7)=4f(5)+6f(7)=4f(1)+6f(3)=4$，…，$g(2\,021)+g(2\,023)=2\,020f(2\,021)+2\,022f(2\,023)=2\,020f(1)+2\,022f(3)=4$，所以 $\sum_{i=1}^{2\,023}g(i)=[g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2\,022)]+[g(1)+g(3)]+[g(5)+g(7)]+\cdots+[g(2\,021)+g(2\,023)]=4\times 506=2\,024$. 故选C项.

二、选择题

9. BCD 【解析】由题意可知，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(f(-x))=f(f(x))$，所以 $f(f(x))$ 为偶函数，A项错误；由 $g(-x)=-g(x)$，得 $g(g(-x))=g(-g(x))=-g(g(x))$，所以 $g(g(x))$ 为奇函数，B项正确；因为 $f(g(-x))=f(g(x))$，所以 $f(g(x))$ 为偶函数，C项正确；因为 $g(f(-x))=g(f(x))$，所以 $g(f(x))$ 为偶函数，D项正确. 故选BCD项.

10. ABC 【解析】圆内接正 n 边形的周长 $l_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$，所以 $a_n=\frac{l_n}{2r}=n\sin\frac{\pi}{n}$. 当 $n=6$ 时，$a_6=6\sin\frac{\pi}{6}=3$，A项正确；由上可知 $a_{2n}=2n\sin\frac{\pi}{2n}$，所以 $\frac{a_n}{a_{2n}}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}=\cos\frac{\pi}{2n}$，所以 $a_n=\cos\frac{\pi}{2n}\cdot a_{2n}$，B项正确；当 n 越大，则 l_n 的值越大，越接近外接圆的周长，所以 $a_n=\frac{l_n}{2r}$ 越大，故 $\{a_n\}$ 是递增数列，C项正确；当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\theta<\theta$，所以 $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}<x\cdot\frac{\pi}{x}=\pi<2\sqrt{3}$，即 $a_n^2<12$，D项错误. 故选ABC项.

11. ACD 【解析】$\frac{3}{a+2}+\frac{3}{b+2}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{a+2}\times\frac{3}{b+2}}=2\sqrt{\frac{9}{(a+2)(b+2)}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{3}{a+2}=\frac{3}{b+2}$，即 $a=b=3\sqrt{2}-2$ 时取等号，A项正确；由条件可知 $ab+2(a+b)-14=0$，所以 $ab+4\sqrt{ab}-14\leqslant 0$，解得 $-3\sqrt{2}-2\leqslant\sqrt{ab}\leqslant 3\sqrt{2}-2$，由 $a>0, b>0$ 得，$0<\sqrt{ab}\leqslant 3\sqrt{2}-2$，所以 $ab\leqslant 22-12\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=3\sqrt{2}-2$ 时取得等号，B项错误；由 $b=\frac{18}{a+2}-2$ 得，$2a+b=2a+\frac{18}{a+2}-2=2(a+2)+\frac{18}{a+2}-6\geqslant 2\sqrt{2(a+2)\times\frac{18}{a+2}}$

$-6=6$，当且仅当 $2(a+2)=\frac{18}{a+2}$，即 $a=1,b=4$ 时取得等号，C项正确；由上述条件可知 $14=ab+2(a+b)=(a+1)b+2(a+1)+b-2\geqslant(a+1)b+2\sqrt{2(a+1)b}-2$，整理得 $(a+1)b+2\sqrt{2(a+1)b}-16\leqslant0$. 令 $t=\sqrt{(a+1)b}$，则 $t^2+2\sqrt{2}t-16\leqslant0$，解得 $0<t\leqslant2\sqrt{2}$，则 $(a+1)b\leqslant8$，当且仅当 $b=2(a+1)$，即 $a=1,b=4$ 时取得等号，D项正确. 故选ACD项.

12. AD 【解析】$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$，$f'(x)=e^x-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2e^x-2}{x^2}$. 令 $g(x)=x^2e^x-2(x\neq0)$，则 $g'(x)=(x^2+2x)e^x$，当 $x<-2$ 或 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，当 $-2<x<0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内单调递增，在 $(-2,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)\leqslant g(-2)=\frac{4}{e^2}-2<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，甲的命题是真命题，A项正确；由上可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 没有极值点，当 $x>0$ 时，$g\left(\frac12\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-2<0$，$g(1)=e-2>0$，所以 $g\left(\frac12\right)g(1)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个极值点，乙的命题是假命题，B项错误；当 $x>0$ 时，$f(x)$ 没有零点；当 $x<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)\leqslant f(-1)=\frac1e-2<0$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，由上可知 $g(x)<0$，即 $x^2e^x-2<0$，所以 $e^x<\frac{2}{x^2}$，又知 $x^2>|x|$，所以 $e^x<\frac{2}{x^2}<\frac{2}{|x|}$，则 $e^x+\frac{2}{x}<0$，所以 $f(x)$ 没有零点，丙的命题是假命题，C项错误；由上可知，存在 $x_0\in\left(\frac12,1\right)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $x_0^2e^{x_0}=2$，则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}+\frac{2}{x_0}=\frac{2}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}>4$，则 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>4$，丁的命题是真命题，D项正确. 故选AD项.

三、填空题

13. 4或9(写出一个即可)【解析】由题意可知，集合 M 中有三个元素，则 m 有三个因数，除1和它本身 m 外，还有1个，所以 m 的值可以为4，9.

14. $-\left(x-\frac12\right)^2+\frac94$ 【解析】因为 -1 和 2 是二次函数 $f(x)$ 的两个零点，则直线 $x=\frac12$ 是 $f(x)$ 的图像的对称轴，又 $f(x)$ 的最大值为 $\frac94$，所以设 $f(x)=a\left(x-\frac12\right)^2+\frac94(a<0)$，由 $f(2)=0$，得 $\frac94a+\frac94=0$，解得 $a=-1$，故 $f(x)=-\left(x-\frac12\right)^2+\frac94$.

15. 9　-18(第一空2分，第二空3分)【解析】令 $x=0$，得 $a_0=1$，由二项展开式的通项公式可知 $a_1=C_n^1(-4)=-4n$，由 $a_0+a_1=-35$，得 $1-4n=-35$，解得 $n=9$. $\left(2x-\frac1x+1\right)^9$ 由9个 $\left(2x-\frac1x+1\right)$ 连乘得到，要得到含 x^{-7} 的项，有两种情形：①这9个式子中：8个式子中取 $-\frac1x$，剩下的1个式子中取 $2x$；②这9个式子中：7个式子中取 $-\frac1x$，剩下的2个式子中取1. 故含 x^{-7} 的系数为 $C_9^8\times2-C_9^7=-18$.

16. $-\frac{\ln2+1}{2}$ 【解析】令 $x_1=x_2=1$，则 $f(1)+1=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=1$；令 $x_1=x_2=-1$，则 $f(1)+1=f(-1)+f(-1)$，所以 $f(-1)=1$；令 $x_1=x,x_2=-1$，则 $f(-x)+1=f(x)+f(-1)$，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 不等式 $f(x)-f(e^{x^2+a})\leqslant[f(1)]^2-f(-1)$ 化为 $f(x)\leqslant f(e^{x^2+a})$，因为 $x>0$，$e^{x^2+a}>0$，所以 $x\geqslant e^{x^2+a}$，则 $\ln x\geqslant x^2+a$，即 $a\leqslant\ln x-x^2(x>0)$，由题设条件可知 $a\leqslant(\ln x-x^2)_{\max}$，设 $h(x)=\ln x-x^2(x>0)$，则 $h'(x)=\frac1x-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$ 内单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$ 内单调递减，则 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=-\frac{\ln2+1}{2}$，所以 $a\leqslant-\frac{\ln2+1}{2}$，故实数 a 的最大值为 $-\frac{\ln2+1}{2}$.

四、解答题

17. 解：(1)

	优秀	非优秀	总计
甲班	22	28	50
乙班	32	18	50
总计	54	46	100

(2分)

$\chi^2=\frac{100\times(22\times18-28\times32)^2}{50\times50\times54\times46}\approx4.026>3.841$，(4分)

所以有95%的把握认为成绩是否优秀与课改方案有关. (5分)

(2)X 的取值范围是$\{0,1,2,3\}$.

则 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$, $P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$. (7 分)

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(8 分)

则 $E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$. (10 分)

18. **解**:(1)当 $0<x<10$ 时,$f(x)=7x-3-\left[\frac{1}{2}x^2-9\ln(x+1)\right]=7x-3-\frac{1}{2}x^2+9\ln(x+1)$; (2 分)

当 $x\geqslant 10$ 时,$f(x)=7x-3-\left(8x+\frac{100}{x-2}-70\right)=67-\left(x+\frac{100}{x-2}\right)$. (4 分)

所以 $f(x)=\begin{cases}7x+9\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2-3, 0<x<10,\\ 67-\left(x+\frac{100}{x-2}\right), x\geqslant 10.\end{cases}$ (5 分)

(2)当 $0<x<10$ 时,$f'(x)=7-x+\frac{9}{x+1}=-\frac{(x+2)(x-8)}{x+1}$. (6 分)

当 $0<x<8$ 时,$f'(x)>0$;当 $8<x<10$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,8)$ 内单调递增,在 $(8,10)$ 内单调递减,此时 $f(x)_{\max}=f(8)=56+9\ln 9-35=21+18\ln 3\approx 40.8$. (8 分)

当 $x\geqslant 10$ 时,$f(x)=65-\left(x-2+\frac{100}{x-2}\right)\leqslant 65-2\sqrt{(x-2)\times\frac{100}{x-2}}=45$,

当且仅当 $x-2=\frac{100}{x-2}$,即 $x=12$ 时取得等号. (11 分)

因为 $45>40.8$,所以当年加工量为 12 万斤时,该苹果农户获得最大年利润为 45 万元. (12 分)

19. (1)**解**:由 $a_1=1$,$a_2=\frac{1}{3}$ 可知 $\frac{3a_2}{a_1}=1$. (1 分)

由题设条件可知 $\frac{(n+2)a_{n+1}}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+2}$, (2 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{n(n+1)}$. (4 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 满足 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$, (5 分)

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$. (6 分)

(2)**证明**:选择①,来源:高三答案公众号

由(1)可知 $b_n=\frac{2a_n}{n+2}=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}=2\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, (8 分)

所以 $S_n=2\times\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=2\times\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}<1$. (12 分)

选择②,

由(1)可知 $b_n=(n+1)a_na_{n+1}=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}=2\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$. (8 分)

所以 $S_n=2\times\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=2\times\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}<1$. (12 分)

选择③,

由(1)可知 $b_n=\frac{(2n+1)a_n^2}{4}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$, (8 分)

所以 $S_n=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$. (12 分)

20. **解**:(1)设在第一题的抢答中,甲得分为 X,则 X 的取值范围是$\{0,20\}$, (1 分)

$P(X=0)=0.5\times(1-0.8)+0.5\times 0.6=0.40$, (3 分)

$P(X=20)=1-P(X=0)=1-0.40=0.60$, (4 分)

所以甲得分的均值 $E(X)=0\times 0.40+20\times 0.60=12$. (5 分)

(2)设甲以 3∶0,3∶1,3∶2 获胜的概率为 P_1,P_2,P_3.

由(1)可知 $P_1=0.6\times 0.6\times 0.6=0.216$, (6 分)

$P_2=C_3^2\,0.6^2\times 0.4\times 0.6=0.2592$, (8 分)

$P_3=C_4^2\,0.6^2\times 0.4^2\times 0.6=0.20736$, (10 分)

所以甲成为本期擂主的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=0.68256$. (12 分)

21. **解**:(1)由题意可知 $a_2=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$,当 $n\geqslant2$ 时,

由 $a_n=-\frac{2}{3}S_{n-1}$ 得 $a_{n+1}=-\frac{2}{3}S_n$,

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=-\frac{2}{3}a_n$,所以 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$,(3 分)

所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$(4 分)

(2)当 $n\geqslant2$ 时,$T_n=3-2\left[2\times\left(\frac{1}{3}\right)^0+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right]$,

所以$\frac{1}{3}T_n=1-2\left[2\times\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$,(5 分)

于是$\frac{2}{3}T_n=2-2\left[2\times\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

$$=2-2\left[2+\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

$$=(2n+3)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-3.$$

所以 $T_n=\frac{6n+9}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{2}(n\geqslant2)$.(7 分)

设 $c_n=T_n+\frac{9}{2}a_n$,

则 $c_n=\frac{6n+9}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{2}-9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\frac{6n-45}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{2}$.(8 分)

设数列$\{c_n\}$的第 n 项的值最大($n\geqslant3$),

由$\begin{cases}c_n\geqslant c_{n-1},\\c_n\geqslant c_{n+1}\end{cases}$得

$$\begin{cases}\frac{6n-45}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{2}\geqslant\frac{6(n-1)-45}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-\frac{9}{2},\\\frac{6n-45}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{9}{2}\geqslant\frac{6(n+1)-45}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\frac{9}{2},\end{cases}$$

解得 $8\leqslant n\leqslant9$,所以 $n=8$ 或 $n=9$.

所以数列$\{c_n\}$的第 8 项和第 9 项的值最大,且 $c_8=c_9=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^6-9\right]$,(10 分)

由题意可知不等式 $ma_4\geqslant c_8$ 恒成立,

所以$-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot m\geqslant\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^6-9\right]$,

解得 $m\leqslant20\frac{20}{81}$.

当 $n\geqslant2$ 时,m 的最大值为 20.(12 分)

22. (1)**解**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

当 $b=0$ 时,$f'(x)=\frac{2a}{x}-2x=\frac{2a-2x^2}{x}$.(1 分)

当 $a<0$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;(2 分)

当 $a>0$ 时,当 $x\in(0,\sqrt{a})$时,$f'(x)>0$,$x\in(\sqrt{a},+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递增,在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递减.(3 分)

综上,当 $a<0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递增,在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递减.(4 分)

(2)**证明**:由 $f(x_1)=f(x_2)$,得 $2a\ln x_1+\frac{b}{x_1^2}-x_1^2=2a\ln x_2+\frac{b}{x_2^2}-x_2^2$,

所以 $2a(\ln x_2-\ln x_1)=x_2^2-x_1^2+\frac{b}{x_1^2}-\frac{b}{x_2^2}=x_2^2-x_1^2+\frac{b(x_2^2-x_1^2)}{x_1^2x_2^2}$,

则$\frac{2a}{x_2^2-x_1^2}\ln\frac{x_2}{x_1}=1+\frac{b}{x_1^2x_2^2}$,(5 分)

要证 $x_1^2+x_2^2+b\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$,

即证$(x_1^2+x_2^2)\left(1+\frac{b}{x_1^2x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$,

又 $a>0$,所以即证$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2^2-x_1^2}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$,

即证$\frac{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2-1}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$,(6 分)

令 $t=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2>1$,设 $g(t)=\frac{1+t}{t-1}\ln t(t>1)$,

则 $g'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$,

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$,

则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$,

所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,则 $h(t)>h(1)=0$,

所以 $g'(t)>0$，则 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．（7 分）

由 $0<\sqrt{a}<x_1<x_2<\sqrt{b}$，得 $\frac{b}{a}>\frac{x_2^2}{x_1^2}>1$．

所以 $g\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)<g\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1}\ln\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}$．

所以需证 $\frac{a+b}{b-a}\ln\frac{b}{a}<\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$，

即证 $\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$，（9 分）

令 $m=\sqrt{\frac{b}{a}}$，则 $m>1$，只需证明 $2\ln m<m-\frac{1}{m}$，

即证 $2\ln m-m+\frac{1}{m}<0$．（10 分）

设 $\varphi(m)=2\ln m-m+\frac{1}{m}\ (m>1)$，

则 $\varphi'(m)=\frac{2}{m}-1-\frac{1}{m^2}=\frac{-(m-1)^2}{m^2}<0$，

所以 $\varphi(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $\varphi(m)<\varphi(1)=0$，（11 分）

所以 $2\ln m-m+\frac{1}{m}<0$ 成立，

故 $x_1^2+x_2^2+b\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)<\frac{a^2+ab}{\sqrt{ab}}$．（12 分）