

绝密★启用前

# 2023 年普通高等学校全国统一模拟招生考试

## 新未来 2 月联考

### 理科数学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

#### 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 回答选考题时,考生须按照题目要求作答,并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $(a-1)i = b + 2i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), 则
 

A.  $a=2, b=1$       B.  $a=2, b=-1$       C.  $a=-2, b=-1$       D.  $a=-2, b=1$
2. 已知集合  $A = \{x | ax - 3 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 = 0\}$ . 若  $A \subseteq B$ , 则实数  $a$  的取值集合是
 

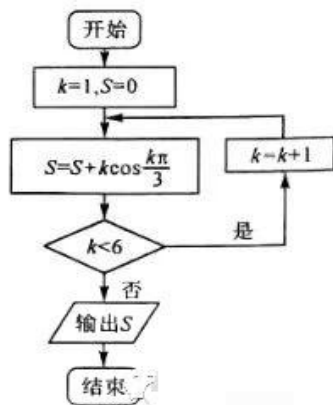
A.  $\{1\}$       B.  $\{-1, 1\}$       C.  $\{-1, 0, 1\}$       D.  $\{0, 1\}$
3. 已知向量  $a, b$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 2$ , 则  $a \cdot b =$ 

A.  $-1$       B.  $0$       C.  $1$       D.  $2$
4. 已知  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , 且  $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , 则  $\tan \theta =$ 

A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\sqrt{5}$       C.  $\sqrt{10}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
5. 已知直线  $y = 2x + 3$  与双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  ( $0 < a < 2, b > 0$ ) 有且仅有 1 个交点, 则双曲线 C 的离心率为
 

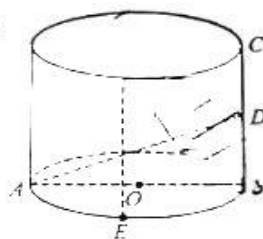
A. 5      B.  $\sqrt{5}$       C.  $\frac{5}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
6. 执行如图所示的程序框图, 则输出的  $S =$ 

A.  $-3$       B.  $-\frac{1}{2}$       C. 0      D. 3



7. 已知奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x+2)$  为偶函数, 则  $f(8) =$   
 A. -1                                      B. 0                                      C. 1                                      D. 2
8. 已知函数  $f(x) = \cos 2\omega x - \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 在  $[0, \pi]$  上有且仅有 2 个零点, 则  $\omega$  的取值范围是  
 A.  $\left[\frac{7}{12}, \frac{13}{12}\right)$                       B.  $\left[\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$                       C.  $\left(\frac{7}{12}, \frac{13}{12}\right)$                       D.  $\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$
9. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且  $a \sin A - c \sin C = (b - \sqrt{3}c) \sin B$ . 若  $D$  是  $BC$  边的中点, 且  $AD = 4$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为  
 A. 16                                      B.  $32 - 16\sqrt{3}$                       C.  $64\sqrt{3}$                               D.  $32 + 16\sqrt{3}$
10. 若对任意的  $0 < x_1 < x_2 \leq a$ ,  $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{x_1 x_2} - \frac{e^{ax_2}}{\sqrt{x_1}} < 0$  恒成立, 则实数  $a$  的最大值为  
 A.  $\frac{1}{2}$                                       B. 1                                      C.  $e$                                       D.  $2e$

11. 如图, 在圆柱  $OO_1$  中,  $AB$  为底面直径,  $P$  是  $AB$  的中点,  $D$  是母线  $BC$  的中点,  $M$  是上底面上的动点, 若  $AB = 1, BC = 3$ , 且  $ME \perp AD$ , 则点  $M$  的轨迹长度为



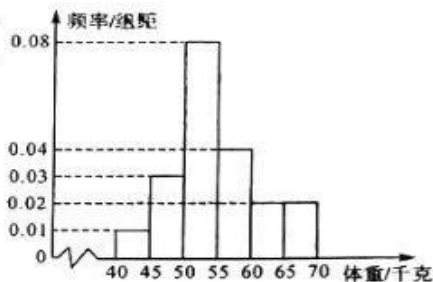
- A.  $\frac{3}{2}$                                       B.  $\sqrt{7}$   
 C.  $\frac{5\sqrt{7}}{4}$                                       D.  $\pi$

12. 已知  $a = e^{11} - 1, b = e^{12} - 0.3, c = \frac{5 \sin 0.1}{2 + \cos 0.1}$ , 则  
 A.  $a < b < c$                               B.  $c < b < a$                               C.  $c > a > b$                               D.  $a > c > b$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $(2 + \frac{y}{x})(x - 2y)^5$  的展开式中  $x^5 y^2$  的系数为 \_\_\_\_\_ (用数字作答).

14. 《中国居民膳食指南(2022)》数据显示, 6 岁至 17 岁儿童青少年超重肥胖率高达 19.0%. 为了解某地中学生的体重情况, 某机构从该地中学生中随机抽取 100 名学生, 测量他们的体重(单位: 千克), 根据测量数据, 按  $[40, 45), [45, 50), [50, 55), [55, 60), [60, 65), [65, 70]$  分成六组, 得到的频率分布直方图如图所示. 根据调查的数据, 估计该地中学生体重的中位数是 \_\_\_\_\_.



15. 已知抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 点  $A, B$  在抛物线上. 若  $\angle AFB = 120^\circ$ , 则当  $\frac{|AF| + |BF|}{|AB|}$  取得最大值时,  $|AF| =$  \_\_\_\_\_.
16. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{3}{2}, a_{n+1} - 3 = (a_n - 2)(a_n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{2023}$  的整数部分是 \_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

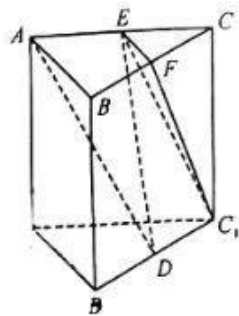
(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $4AA_1 = 3AB$ ， $\triangle ABC$  是等边三角形， $D, E, F$  分别是棱  $B_1C_1, AC, BC$  的中点。

(1) 证明： $AD \parallel$  平面  $C_1EF$ ；

(2) 求平面  $ADE$  与平面  $C_1EF$  所成锐二面角的余弦值。



解：

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ，且  $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & n \text{ 是偶数,} \\ a_n - 1, & n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

(1) 设  $b_n = a_{2n} + a_{2n-1}$ ，证明： $\{b_n + 3\}$  是等比数列；

(2) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，求使得不等式  $S_n > 2022$  成立的  $n$  的最小值。

19. (本小题满分 12 分)

某化学实验课老师在学期末要对所教学生进行一次化学实验考核，每个学生需要独立完成该实验考核。根据以往数据，在  $A, B, C, D, E$  五名学生中， $A, B, C$  三人能独立完成实验的概率均为  $\frac{1}{2}$ ， $D, E$  两人能独立完成实验的概率均为  $p$  ( $0 < p < 1$ )。

(1) 若  $p = \frac{1}{3}$ ，求这五名学生中恰有四名学生通过实验考核的概率；

(2) 设这五名学生中通过实验考核的人数为随机变量  $X$ ，若  $X$  的数学期望  $E(X) \geq 3$ ，求  $p$  的取值范围。





20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左顶点为  $A(-2\sqrt{2}, 0)$ , 右焦点为  $F(2, 0)$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于点  $M, N$  (异于点  $A$ ), 直线  $AM, AN$  分别与直线  $x=4$  交于点  $P, Q$ . 问:  $\angle PFQ$  的大小是否为定值? 若是, 求出此定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x-a)e^{x+1} - \frac{1}{2}x^2$ , 且曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线与  $x$  轴平行.

(1) 求实数  $a$  的值和  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3$ , 证明:  $x_2 + x_3 < 0$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x=4+4\cos \alpha \\ y=4\sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 以坐标原点

为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 4\cos \alpha$ .

(1) 求曲线  $C_1$  的普通方程和曲线  $C_2$  的直角坐标方程;

(2) 射线  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ( $\rho \geq 0$ ) 与曲线  $C_1$  异于原点的交点为  $A$ , 与曲线  $C_2$  异于原点的交点为  $B$ , 求

$|AB|$  的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+2|$ .

(1) 若  $a=1$ , 求不等式  $f(x) \leq 7$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq 2a+1$ , 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

