2022~2023学年度高三年级第一学期期末模拟测试

数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡"条形码粘贴处"。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathrm{N}\,|\,3<x<7\}$，$B=\{x\,|\,\log_2(x-2)<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|3\leqslant x<6\}$　　B. $\{x|3<x<6\}$　　C. $\{4,5,6\}$　　D. $\{4,5\}$

2. 设复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}\,(z\in\mathrm{C})$，则 $\bar{z}$ 对应的点位于复平面内的

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

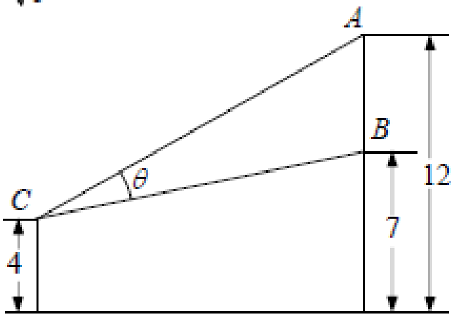
A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_5=5$，$S_7=28$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2022}\dfrac{1}{S_k}=$

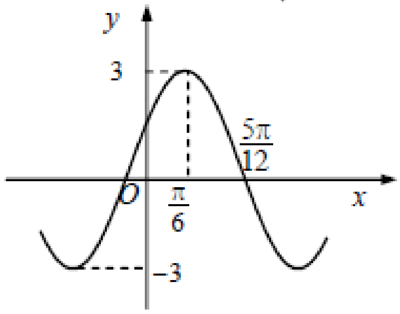
A. $\dfrac{2021}{1011}$　　B. $\dfrac{4044}{2023}$　　C. $\dfrac{2023}{1012}$　　D. 2

5. 如图，有一壁画，最高点 A 处离地面 12m，最低点 B 处离地面 7m．若从离地高 4m 的 C 处观赏它，若要视角 θ 最大，则离墙的距离为

A. $\sqrt{6}$ m　　B. 3 m　　C. 4m　　D. $2\sqrt{6}$ m



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，若把 $f(x)$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

A. $3\sin 2x$　　B. $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $3\cos 2x$

7. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,-\sqrt{3})$，点 F 是椭圆的右焦点，点 F 到左顶点的距离和到右准线的距离相等. 过点 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点（A 点位于 x 轴下方），且 $AF=2BF$，则直线 l 的斜率为

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

8. 设 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b.\end{cases}$ 若函数 $f(x)=\min\{e^{x-1}-x,-x^2+2mx-1\}$ 有且只有三个零点，则实数 m 的取值范围为

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知变量 y 与 x 具有线性相关关系，统计得到 6 组数据如下表：

x	2	4	7	10	15	22
y	8.1	9.4	12	14.4	18.5	24

若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$，则

A. 变量 y 与 x 之间正相关　　B. $\bar{y}=14.4$

C. $\hat{a}=6.8$　　D. 当 $x=12$ 时，y 的估计值为15.6

10. 已知函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$，则

A. 若 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极值，则 $f'(a)=0$

B. 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是减函数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f'(x)<0$

C. 若 $y=f(x)$ 为偶函数，则 $y=f'(x)$ 是奇函数

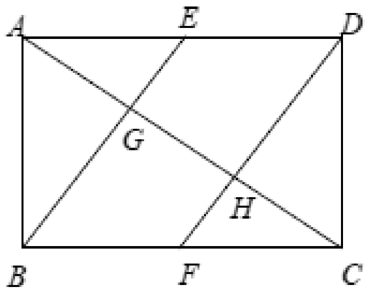
D. 若 $y=f(x)$ 是周期函数，则 $y=f'(x)$ 也是周期函数

11. 已知函数 $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$，则

A. $f(x)$的最小值为 2　　　　B. $f(x)$的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称　　　　D. $f(x)$的图象关于 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 中心对称

12. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AD=\sqrt{2}AB=10\sqrt{2}$，边 AD,BC 的中点分别为 E,F，直线 BE 交 AC 于点 G，直线 DF 交 AC 于点 H．现分别将△ABE，△CDF 沿 BE,DF 折起，点 A,C 在平面 $BFDE$ 同侧，则



A. 当平面 $AEB\perp$ 平面 $BEDF$ 时，$AG\perp$ 平面 $BEDF$

B. 当平面 AEB // 平面 CDF 时，AE // CD

C. 当 A,C 重合于点 P 时，二面角 $P-DF-B$ 的大小等于 $60°$

D. 当 A,C 重合于点 P 时，三棱锥 $P-BEF$ 与 $P-DEF$ 外接球面公共圆的周长为 10π

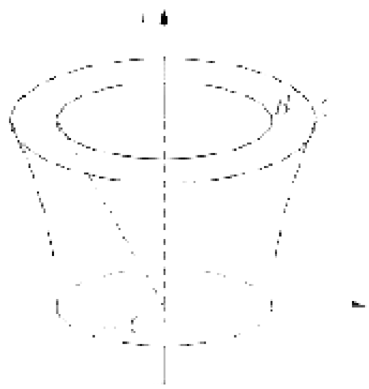
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的两条渐近线所成的角等于__________.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数解析式为 $f(x)=$__________.
①不是常数函数；② $f(-x)-f(x)=0$；③ $f(1-x)=f(1+x)$.

15. 若 $\left(x+1+\dfrac{a}{x}\right)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中所有项的系数和为 243，则展开式中 x^4 的系数是______.

16. 早在南北朝时期，祖冲之和他的儿子祖暅在研究几何体的体积时，得到了如下的祖暅原理：幂势既同，则积不容异．这就是说，夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任意平面所截，两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积一定相等．将双曲线 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 与 $y=0$，$y=\sqrt{3}$ 所围成的平面图形（含边界）绕其虚轴旋转一周得到如图所示的几何体Γ，其中线段 OA 为双曲线的实半轴，点 B 和 C 为直线 $y=\sqrt{3}$ 分别与与双曲线一条渐近线及右



支的交点，则线段 BC 旋转一周所得的图形的面积是________，几何体 Γ 的体积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，$c^2=a^2+ab$.

（1）证明：$C=2A$；

（2）若 $a=3$，$\sin A=\frac{1}{3}$，求△ABC 的面积.

18.（12 分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n^2-(n^2+n-2)S_n-2(n^2+n)=0$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

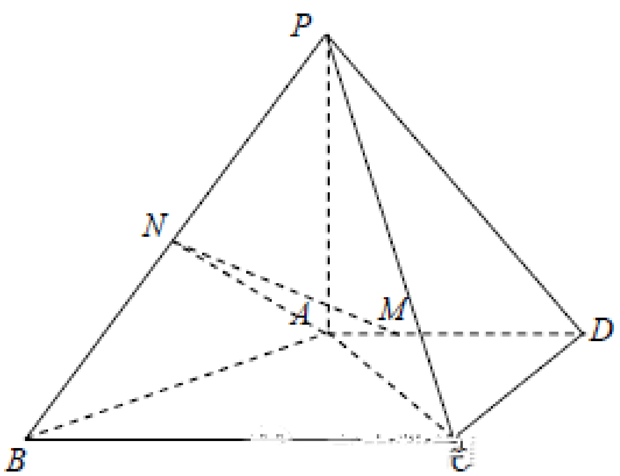
（2）若 $b_n=[\lg a_n]$（其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数），求数列$\{b_n\}$的前 100 项的和 T_{100}.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD\,//\,BC$，N 为 PB 的中点.

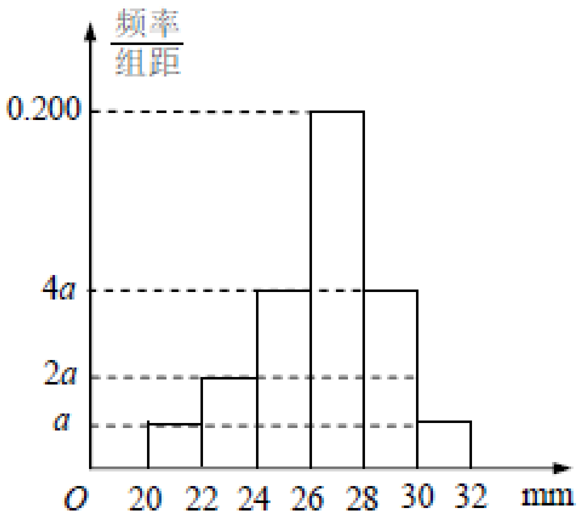
（1）若点 M 在 AD 上，$2AM=MD$，$AD=\frac{3}{4}BC$，证明：$MN\,//$平面 PCD；

（2）若 $PA=AB=AC=AD=3$，$BC=4$，求二面角 $D-AC-N$ 的余弦值.



20．（12 分）

某棉纺厂为了解一批棉花的质量，在该批棉花中随机抽取了容量为120 的样本，测量每个样本棉花的纤维长度（单位：mm，纤维长度是棉花质量的重要指标），所得数据均在区间$[20,32]$内，将其按组距为2分组，制作成如图所示的频率分布直方图，其中纤维长度不小于28 mm 的棉花为优质棉.



（1）求频率分布直方图中a的值；

（2）已知抽取的容量为120 的样本棉花产自于A,B两个试验区，部分数据如下2×2列联表：

	A试验区	B试验区	合计
优质棉	10		
非优质棉		30	
合计			120

将2×2列联表补充完整，并判断是否有99.9%的把握认为优质棉与A,B两个试验区有关系；

（3）若从这批 120 个样本棉花中随机抽取 3 个，其中有X个优质棉，求X的分布列和数学期望$E(X)$.

注：①独立性检验的临界值表：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

② $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

21．（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 l 过 C 的焦点且垂直于 x 轴，直线 l 被 C 所截得的线段长为 $\sqrt{2}$．

（1）求 C 的方程；

（2）若 C 与 y 轴的正半轴相交于点 P，点 A 在 x 轴的负半轴上，点 B 在 C 上，$PA\perp PB$，$\angle PAB=60^\circ$，求 $\triangle PAB$ 的面积．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+2x}{e^x}$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a=1$，证明：$f(x)<x+\frac{1}{2}(x>0)$．

2022~2023学年度高三年级第一学期期末模拟测试

数学试题参考答案与解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． 设集合 $A=\{x\in\mathrm{N}\mid 3<x<7\}$，$B=\{x\mid \log_2(x-2)<2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{x\mid 3\leqslant x<6\}$　　B．$\{x\mid 3<x<6\}$　　C．$\{4，5，6\}$　　D．$\{4，5\}$

【答案】D

【解析】因为 $B=\{x\mid \log_2(x-2)<2\}=\{x\mid 2<x<6\}$，$A=\{x\in\mathrm{N}\mid 3<x<7\}$，

所以 $A\cap B=\{4，5\}$．

2．设复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，若 $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}\,(z\in\mathrm{C})$，则 $\overline{z}$ 对应的点位于复平面内的

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】C

【解析】因为 $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}\,(z\in\mathrm{C})$，所以 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，$\overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}$ 对应的点位于复平面内的第三象限．

3． 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A．$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【答案】A

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$，

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{2^2+2\times2\sqrt{3}+2^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$．

4．等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_5=5$，$S_7=28$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2022}\dfrac{1}{S_k}=$

A．$\dfrac{2021}{1011}$　　B．$\dfrac{4044}{2023}$　　C．$\dfrac{2023}{1012}$　　D．2

【答案】B

【解析】设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，由题意有 $\begin{cases} a_1+4d=5 \\ 7a_1+\dfrac{7\times 6}{2}d=28 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$，

数列的前 n 项和 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n\times 1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 1=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

裂项可得 $\dfrac{1}{S_k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{2022}\dfrac{1}{S_k}=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{2022}-\dfrac{1}{2023})]=2(1-\dfrac{1}{2023})=\dfrac{4044}{2023}$．

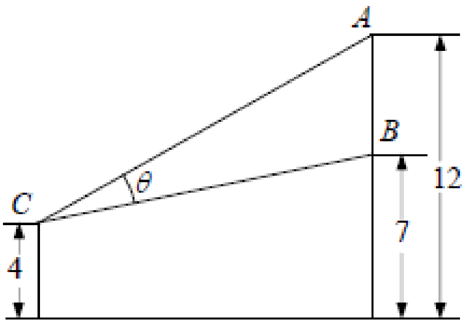
5．　如图，有一壁画，最高点 A 处离地面 12m，最低点 B 处离地面 7m．若从离地高 4m 的 C 处观赏它，若要视角 θ 最大，则离墙的距离为

A．$\sqrt{6}$ m　　B．3 m　　C．4m　　D．$2\sqrt{6}$ m

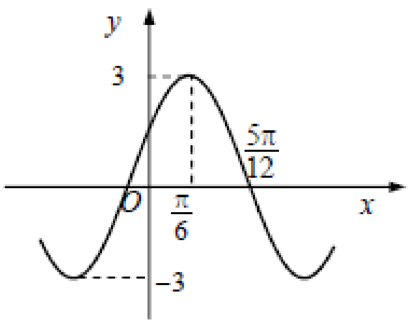
【答案】D

【解析】设离墙的距离为 x m，则 $\tan\theta=\dfrac{\dfrac{8}{x}-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{8}{x}\cdot\dfrac{3}{x}}=\dfrac{5}{x+\dfrac{24}{x}}\leqslant\dfrac{5}{2\sqrt{24}}$，

当且仅当 $x=\dfrac{24}{x}$，即 $x=2\sqrt{6}$ 时去等号．



（第 5 题）



（第 6 题）

6．　已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，若把 $f(x)$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

A．$3\sin 2x$　　B．$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C．$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$3\cos 2x$

【答案】D

【解析】由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象，得

$A=3$，$4\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，

又因为当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，

所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos 2x$.

7. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,-\sqrt{3})$，点 F 是椭圆的右焦点，点 F 到左顶点的距离和到右准线的距离相等. 过点 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点（A 点位于 x 轴下方），且 $AF=2BN$，则直线 l 的斜率为

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】设椭圆的焦距为 $2c$，由椭圆经过点 $(0,-\sqrt{3})$ 得 $b=\sqrt{3}$，　①

由点 F 到左顶点的距离和到右准线的距离相等

得 $a+c=\frac{a^2}{c}-c$，　②　又 $a^2=b^2+c^2$，　③

由①②③可得 $a=2$，$c=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y_1<0$ 由 $AF=2BN$ 得，$x_1-1=2(1-x_2)$

即 $x_1=3-2x_2$ ①

由第二定义可得 M 到右准线的距离是 N 到右准线的距离的 2 倍

即 $4-x_1=2(4-x_2)$ ②

由①②解得 $x_1=-\frac{1}{2}$，代入椭圆方程，$y_1=-\frac{3\sqrt{5}}{4}$，

所以直线的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

8. 设 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a, a\leqslant b,\\ b, a>b.\end{cases}$ 若函数 $f(x)=\min\{e^{x-1}-x,-x^2+2mx-1\}$ 有且只有三个零点，

则实数 m 的取值范围为

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】设 $g(x)=e^{x-1}-x$，则 $g'(x)=e^{x-1}-1$，

由 $g'(x)=e^{x-1}-1>0$，得 $x>1$；由 $g'(x)=e^{x-1}-1<0$，得 $x<1$，

所以函数 $g(x)=e^{x-1}-x$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(t)_{\min}=g(1)=e^0-1=0$，即得函数 $g(x)=e^{x-1}-x$ 有且只有一个零点1，

且当 $x\neq1$ 时，$g(x)=e^{x-1}-x>0$．

又因为 $h(x)=-x^2+2mx-1$ 在 $(-\infty,m]$ 上单调递增，在 $(m,+\infty)$ 上单调递减，

且函数 $h(x)=-x^2+2mx-1$ 至多有两个零点，

又函数 $f(x)=\min\{e^{x-1}-x,-x^2+2mx-1\}$ 有且只有三个零点，

所以函数 $h(x)=-x^2+2mx-1$ 一定有一个零点大于1，另一个零点小于1，

所以 $h(1)=2m-2>0$，所以 $m>1$．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．已知变量 y 与 x 具有线性相关关系，统计得到 6 组数据如下表：

x	2	4	7	10	15	22
y	8.1	9.4	12	14.4	18.5	24

若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$，则

A．变量 y 与 x 之间正相关　　B．$\overline{y}=14.4$

C．$\hat{a}=6.8$　　D．当 $x=12$ 时，y 的估计值为15.6

【答案】AB

【解析】选项 A：因为 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$，

所以 $\hat{b}=0.8>0$，所以变量 y 与 x 之间正相关．故选项 A 正确．

选项B：因为$\overline{y}=\frac{1}{6}(8.1+9.4+12+14.4+18.5+24)=14.4$，所以选项B正确；

选项C：因为$\overline{x}=\frac{1}{6}(2+4+7+10+15+22)=10$，

所以$14.4=0.8\times 10+\hat{a}$，所以$\hat{a}=6.4$．故选项C不正确；

选项D：因为y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=0.8x+6.8$，

所以当$x=12$时，$\hat{y}=0.8\times 12+6.4=16$，所以选项D不正确．

10． 已知函数$y=f(x)$的导函数为$y=f'(x)$，则

A．若$y=f(x)$在$x=a$处取得极值，则$f'(a)=0$

B．若函数$y=f(x)$在(a,b)上是减函数，则当$x\in(a,b)$时，$f'(x)<0$

C．若$y=f(x)$为偶函数，则$y=f'(x)$是奇函数

D．若$y=f(x)$是周期函数，则$y=f'(x)$也是周期函数

【答案】ACD

【解析】选项A：因为函数$y=f(x)$在$x=a$处取得极值，

所以根据函数极值的定义，导函数$y=f'(x)$在a的左右两侧符号相反，

在$x=a$时，导函数值$f'(a)=0$．故选项A正确；

选项B：函数$f(x)=-x^3$在$(-1,1)$上是减函数，

当$x\in(-1,1)$时，$f'(x)=-3x^2\leqslant 0$，所以选项B不正确；

选项C：因为$y=f(x)$为偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，

所以$-f'(-x)=f'(x)$，所以$y=f'(x)$是奇函数．故选项C正确；

选项D：设$y=f(x)$是周期为$T(T\neq 0)$的周期函数，

则$f(x+T)=f(x)$，所以$f'(x+T)=f'(x)$，

所以$y=f'(x)$也是周期为$T(T\neq 0)$的周期函数．故选项D正确．

11． 已知函数$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$，则

A．$f(x)$的最小值为2　　　　B．$f(x)$的图象关于y轴对称

C．$f(x)$的图象关于直线$x=\pi$对称　　D．$f(x)$的图象关于$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$中心对称

【答案】BCD

【分析】因为$\cos x$可以为负，所以A错；

因为$f(-x)=\cos(-x)+\dfrac{1}{\cos(-x)}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}=f(x)$，

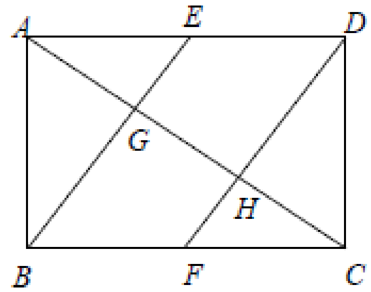
所以$f(x)$为偶函数，$f(x)$的图象关于y轴对称，B正确；

$$f(2\pi-x)=\cos(2\pi-x)+\frac{1}{\cos(2\pi-x)}=f(x),$$

$$f(\pi-x)=\cos(\pi-x)+\frac{1}{\cos(\pi-x)}=-f(x),$$

所以$f(x)$的图象关于直线$x=\pi$对称，关于$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$中心对称，故CD正确.

12．如图，矩形$ABCD$中，$AD=\sqrt{2}AB=10\sqrt{2}$，边AD,BC的中点分别为E,F，直线BE交AC于点G，直线DF交AC于点H．现分别将$\triangle ABE$，$\triangle CDF$沿BE,DF折起，点A,C在平面$BFDE$同侧，则



A．当平面$AEB\perp$平面$BEDF$时，$AG\perp$平面$BEDF$

B．当平面AEB // 平面CDF时，AE // CD

C．当A,C重合于点P时，二面角$P-DF-B$的大小等于60°

D．当A,C重合于点P时，三棱锥$P-BEF$与$P-DEF$外接球面公共圆的周长为10π

【答案】ACD

【解析】因为在矩形$ABCD$中，$AD=\sqrt{2}AB=10\sqrt{2}$，边AD,BC的中点分别为E,F，

所以$AG=\frac{1}{3}AC=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$EG=\frac{1}{3}BE=\frac{5\sqrt{6}}{3}$，

所以$\frac{EG}{GA}=\frac{EA}{AB}$，$\triangle EGA\backsim\triangle EAB$，

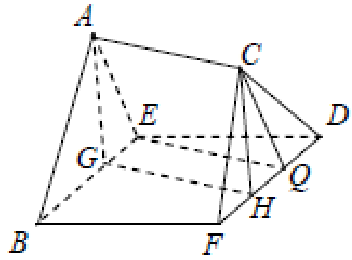
所以$\angle EGA=90^\circ$，$AC\perp BE$，同理$AC\perp DF$．

选项A：因为平面$AEB\perp$平面$BEDF$，平面$AEB\cap$平面$BEDF=BE$，

又$AG\perp BE$，$AG\subset$平面AEB，所以$AG\perp$平面$BEDF$．故选项A正确；

选项B：因为$AG\perp BE$，

$HC\perp DF$，$BE\,//\,DF$，



所以A，C，G，H四点在同一平面内，

又因为平面$ABE\cap$平面$AGHC=AG$，

平面$CDF\cap$平面$AGHC=CH$，

所以由平面$ABE\,//$平面CDF，得$AG\,//\,CH$，

又$AG=CH$，

所以四边形$AGHC$是平行四边形，所以$AC\,//\,GH$．

取HD的中点Q，连接CQ，EQ，则$EG=QH$，

又$EG\,//\,QH$，所以四边形$EGHQ$是平行四边形，

所以$EQ\,//\,GH\,//\,AC$，$EQ=GH=AC$，

所以四边形$AEQC$是平行四边形，$AE\,//\,CQ$．故选项B不正确；

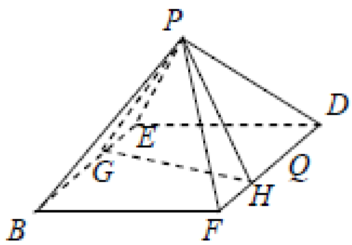
选项C：连接PG，因为$PH\perp DF$，$GH\perp DF$，所以$\angle PHG$为二面角$P-DF-B$的平面角．

又因为$PH=HG=PG$，

所以$\angle PHG=60^\circ$．故选项C正确；

选项D：因为$\angle BPE=\angle BFE=90^\circ$，

$\angle DPF=\angle DEF=90^\circ$，



所以三棱锥$P-BEF$的外接球的直径为BE，球心为BE的中点，半径等于$\frac{1}{2}BE=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，

三棱锥$P-DEF$的外接球的直径为DF，球心为DF的中点，半径等于$\frac{1}{2}DF=\frac{5\sqrt{6}}{2}$，

所以两外接球心间的距离为$\frac{1}{2}AD=5\sqrt{2}$，

所以三棱锥 $P-BEF$ 与 $P-DEF$ 外接球面公共圆的半径为

$$\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=5.$$

所以公共圆的周长为 $2\pi\times 5=10\pi$．故选项D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的两条渐近线所成的角等于

__________.

【答案】90°

【解析】因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，

所以 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2}$，即得 $\frac{b}{a}=1$，

又因为 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

所以 C 的两条渐近线的斜率为 ± 1，倾斜角分别为 $45^\circ,135^\circ$，方程为 $y=\pm x$，

所以 C 的两条渐近线所成的角为 90°.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数解析式为 $f(x)=$__________.

①不是常数函数；②$f(-x)-f(x)=0$；③$f(1-x)=f(1+x)$.

【答案】$\cos\pi x$（答案不唯一）

【解析】由② $f(-x)-f(x)=0$，得 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，

所以由 $f(1-x)=f(1+x)$，得 $f(x)$ 的是图象关于 x=1 对称，

$f(x)=\cos\pi x$ 符合题意.

15. 若 $\left(x+1+\frac{a}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中所有项的系数和为 243，则展开式中 x^4 的系数是______.

【答案】9

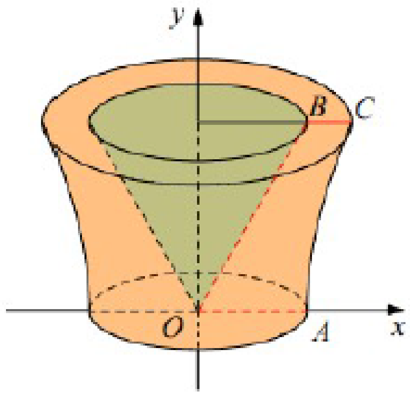
【解析】令 $x=1$，则 $(2+a)\times 3^5=243=3^5$，解得 $a=-1$.

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=2^r C_5^r x^{5-2r}$，

所以 $\left(x+1-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数是 $2\times C_5^1-2^0\times C_5^0=9$.

16. 早在南北朝时期，祖冲之和他的儿子祖暅在研究几何体的体积时.

原理：幂势既同，则积不容异．这就是说，夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任意平面所截，两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积一定相等．将双曲线 $C_1: x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 与 $y=0$，$y=\sqrt{3}$ 所围成的平面图形（含边界）绕其虚轴旋转一周得到如图所示的几何体 Γ，其中线段 OA 为双曲线的实半轴，点 B 和 C 为直线 $y=\sqrt{3}$ 分别与与双曲线一条渐近线及右支的交点，则线段 BC 旋转一周所得的图形的面积是_____，几何体 Γ 的体积为_____．



【答案】π，$\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

【解析】因为 $B(1,\sqrt{3})$，$C(\sqrt{2},\sqrt{3})$，

所以线段 BC 旋转一周所得的图形的面积 $S=\pi\left(\sqrt{2}\right)^2-\pi(1)^2=\pi$．

因为被平行于这两个平面的任意平面所截，两个截面的面积总相等，

所以根据祖暅原理，得：几何体 Γ 的体积为 $V=\pi(1)^2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi(1)^2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，$c^2=a^2+ab$．

（1）证明：$C=2A$；

（2）若 $a=3$，$\sin A=\frac{1}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

【解析】(1)在 ΔABC 中，由余弦定理得，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

因为 $c^2=a^2+ab$，所以 $a^2+ab=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以 $b=a+2a\cos C$． ……2 分

由正弦定理得，$\sin B=\sin A+2\sin A\cos C$，

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $\cos A\sin C-\sin A\cos C=\sin A$，

$\sin(C-A)=\sin A$. ……4 分

因为 A，B，C 是三角形内角，

所以 $C-A=A$，即 $C=2A$. ……5 分

（2）因为 $\sin A=\frac{1}{3}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin C=\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，

$\cos C=\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=\frac{7}{9}$， ……7 分

$\sin B=\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{23}{27}$. ……8 分

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=4\sqrt{2}$，

所以 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times 4\sqrt{2}\times\frac{23}{27}=\frac{46\sqrt{2}}{9}$. ……10 分

18.（12 分）

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n^2-(n^2+n-2)S_n-2(n^2+n)=0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $b_n=[\lg a_n]$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），求数列 $\{c_n\}$ 的前 100 项的和 T_{100}.

【解析】(1)由 $S_n^2-(n^2+n-2)S_n-2(n^2+n)=0$ 得：$(S_n+2)(S_n-(n^2+n))=0$.

因为 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $S_n>0$，所以 $S_n=n^2+n$. ……2 分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$；

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$. ……4 分

经检验：$a_1=2$ 满足 $a_n=2n$.

所以 $a_n=2n(n\in N^*)$. ……6 分

（2） $b_n=[\lg(2n)]$ ……7 分

$T_{100}=c_1+c_2+\cdots+c_{100}$

$=[\lg 2]+[\lg 4]+\cdots[\lg 8]+[\lg 10]+\cdots+[\lg 98]+[\lg 100]+\cdots+[\lg 200]$

$=4\times 0+45\times 1+51\times 2=147$． ……12 分

19.（12 分）

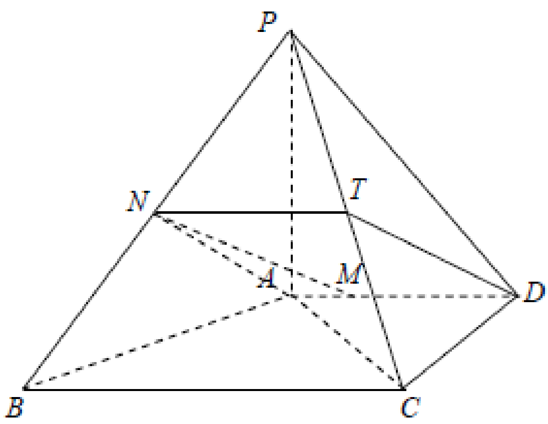
如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\,//\,BC$，N 为 PB 的中点．

（1）若点 M 在 AD 上，$2AM=MD$，$AD=\frac{3}{4}BC$，证明：$MN\,//$ 平面 PCD；

（2）若 $PA=AB=AC=AD=3, BC=4$，求二面角 $D-AC-N$ 的余弦值．

【解】（1）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，取 PC 的中点 T，连接 DT, TN，由 N 为 PB 中点，

知 $TN\,//\,BC$，$TN=\frac{1}{2}BC$． ……1 分



因为 $2AM=MD$，

$AD=\frac{3}{4}BC$，

所以 $MD=\frac{2}{3}AD=\frac{1}{2}BC$，

又因为 $AD\,//\,BC$，

所以 $TN\,//\,DM$，

$TN=DM$， ……3 分

四边形 $DMNT$ 为平行四边形，

所以 $MN\,//\,DT$． ……4 分

又因为 $DT\subset$ 平面 PCD，$MN\not\subset$ 平面 PCD，

所以 $MN\,//$ 平面 PCD． ……5 分

（2）因为 $AB=AC$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，取 BC 的中点 E，连接 AE，

则 $AE\perp BC$，

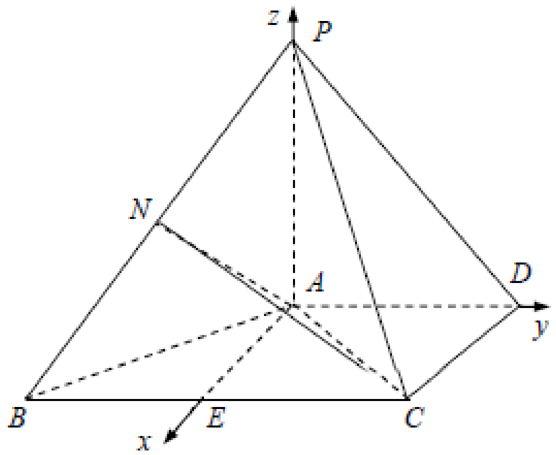
又因为 $AD\,//\,BC$，

所以 $AE\perp AD$．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AP\perp AD, AP\perp AE$，

分别以 AB, AD, AP 所在



的直线为x,y,z轴，建立

如图所示的空间直角坐标

系$A-xyz$，

又因为$PA=AB=AC=AD=3,BC=4$，

所以$A(0,0,0),D(0,3,0),C(\sqrt{5},2,0),B(\sqrt{5},-2,0),P(0,0,3)$，

因为N为PB中点，所以$N\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{5},2,0),\overrightarrow{AN}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$. ……7 分

设平面ACN的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=(\sqrt{5},2,0)(x,y,z)=\sqrt{5}x+2y=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-1,\frac{3}{2}\right)(x,y,z)=\frac{\sqrt{5}}{2}x-y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$

令$y=-\sqrt{5}$，得平面ACN的一个法向量为$\boldsymbol{n}=\left(2,-\sqrt{5},-\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$. ……9 分

又因为平面ACD的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ……10 分

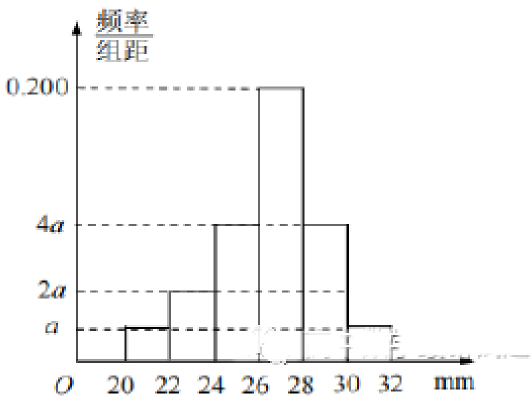
所以$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\left(2,-\sqrt{5},-\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2+\left(-\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2}}=-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{161}}$.

设二面角$D-AC-N$的大小为θ，

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>}=\sqrt{1-\left(-\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{161}}\right)^2}=\frac{9\sqrt{161}}{161}$. ……12 分

20.（12 分）

某棉纺厂为了解一批棉花的质量，在该批棉花中随机抽取了容量为120的样本，测量每个样本棉花的纤维长度（单位：mm，纤维长度是棉花质量的重要指标），所得数据均在区间$[20,32]$内，将其按组距为2分组，



制作成如图所示的频率分布直方图，其中纤维长度不小于28 mm的棉花为优质棉.

（1）求频率分布直方图中a的值；

（2）已知抽取的容量为120的样本棉花产自于A，B两个试验区，部分数据如下2×2列联表：

	A试验区	B试验区	合计
优质棉	10		
非优质棉		30	
合计			120

将2×2列联表补充完整，并判断是否有99.9%的把握认为优质棉与A，B两个试验区有关系；

（3）若从这批120个样本棉花中随机抽取3个，其中有X个优质棉，求X的分布列和数学期望$E(X)$.

注：①独立性检验的临界值表：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

② $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

【解】（1）根据频率分布直方图中的数据，有$2\times(a+a+2a+4a+4a+0.200)=1$，

所以$a=0.025$.　　……2分

（2）根据频率分布直方图，知120个样本棉花中优质棉共有

$120\times(0.100\times2+0.025\times2)=30$个.

完整2×2列联表如下：

	A试验区	B试验区	合计
优质棉	10	20	30
非优质棉	60	30	90

合计	70	50	120

所以 $\chi^2=\dfrac{120(10\times30-20\times60)^2}{70\times50\times30\times90}\approx10.3<10.828$． ……5 分

所以没有99.9% 的把握认为优质棉与 A , B 两个试验区有关系． ……6 分

（3）由频率分布直方图，知 120 个样本棉花中，纤维长度不小于 28 mm 的优质棉的概率为 $\frac{1}{4}$，从中随机抽取 3 个，其中有 X 个优质棉，则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$，

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$； $P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$；

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}$； $P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$．

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

……10 分

所以 X 个优质棉的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$．

或 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$． ……12 分

21．（12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt6}{3}$，直线 l 过 C 的焦点且垂直于 x 轴，直线 l 被 C 所截得的线段长为 $\sqrt2$．

（1）求 C 的方程；

（2）若 C 与 y 轴的正半轴相交于点 P，点 A 在 x 轴的负半轴上，点 B 在 C 上，$PA\perp PB$，$\angle PAB=60^\circ$，求 $\triangle PAB$ 的面积．

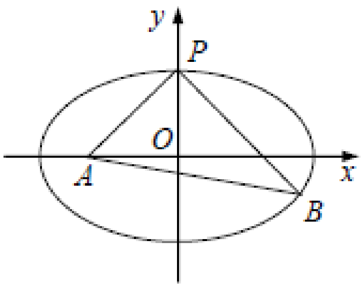
【解】（1）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c，则直线 l 的方程为 $x=c$，

由 $\begin{cases}x=c,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=c,\\ y^2=b^2\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)=\dfrac{b^4}{a^2},\end{cases}$

所以直线 l 被 C 所截得的线段长为 $\sqrt{2}=\frac{2b^2}{a}$，即 $b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，　　……2 分

又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, a^2-c^2=b^2$，所以 $\begin{cases} a=2\sqrt{2}, \\ b=\sqrt{2}. \end{cases}$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．　……4 分



（2）由（1）得 $P\left(0,\sqrt{2}\right)$，

因为 A 在 x 轴的负半轴上，所以直线 PA 的斜率存在且大于 0，

又 $PA\perp PB$，所以直线 PB 的斜率存在且小于 0，

设直线 PB 的方程为 $y=kx+\sqrt{2}\left(k<0\right)$，则

直线 PA 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+\sqrt{2}\left(k<0\right)$，令 $y=0$，得 $x=\sqrt{2}k$，即 $A\left(\sqrt{2}k,0\right)$，

所以 $\left|PA\right|=\sqrt{2+2k^2}$．　　……6 分

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1, \\ y=kx+\sqrt{2}, \end{cases}$ 得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8\sqrt{2}kx=0$，

所以 $x=0, x=-\frac{8\sqrt{2}k}{1+4k^2}$，即 $B\left(-\frac{8\sqrt{2}k}{1+4k^2},-\frac{8\sqrt{2}k^2}{1+4k^2}+\sqrt{2}\right)$，

所以 $\left|PB\right|=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{8\sqrt{2}k}{1+4k^2}\right|=-\frac{8\sqrt{2}k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$．　　……8 分

因为在 $\triangle PAB$ 中，$PA\perp PB$，$\angle PAB=60^\circ$，

所以 $\left|PB\right|=\sqrt{3}\left|PA\right|$，即 $-\frac{8\sqrt{2}k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{2+2k^2}\left(k<0\right)$，

即 $4\sqrt{3}k^2+8k+\sqrt{3}=0\left(k<0\right)$，所以 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}, k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$．　　……10 分

①当 $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\left|PA\right|=\sqrt{2+2k^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}, \left|PB\right|=\sqrt{3}\left|PA\right|=\frac{\sqrt{42}}{2}$，

$\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\left|PA\right|\left|PB\right|=\frac{7\sqrt{3}}{4}$．

②当 $k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$\left|PA\right|=\sqrt{2+2k^2}=\frac{\sqrt{78}}{6}, \left|PB\right|=\sqrt{3}\left|PA\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$，

$\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\left|PA\right|\left|PB\right|=\frac{13\sqrt{3}}{12}$．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+2x}{e^x}$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a=1$，证明：$f(x)<x+\dfrac{1}{2}(x>0)$．

【解】（1）由 $f(x)=\dfrac{ax^2+2x}{e^x}$，得

$$f'(x)=\frac{(2ax+2)e^x-(ax^2+2x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-ax^2+2(a-1)x+2}{e^x},$$ ……1 分

因为 $\triangle=4(a-1)^2+8a=4a^2+4>0$，

当 $a=0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{e^x}>0$，得 $x<1$；

由 $f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{e^x}<0$，得 $x>1$． ……2 分

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}<x<\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $x<\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}, x>\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}$． ……3 分

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}, x>\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}$；

由 $f'(x)<0$，得 $\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}<x<\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}$． ……4 分

所以当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a},\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(-\infty,\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}\right),\left(\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a},\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a}\right)$ 上单调递减，

在 $\left(-\infty,\dfrac{a-1+\sqrt{a^2+1}}{a}\right),\left(\dfrac{a-1-\sqrt{a^2+1}}{a},+\infty\right)$ 上单调递增．

……5 分

（2）方法 1：当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$，

所以 $f(x)<x+\frac{1}{2}(x>0)$ 等价于 $e^x\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+2x\right)>0$.

设 $g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)(x>0)$,

则 $g'(x)=e^x-(1+x)(x>0)$, 设 $h(x)=g'(x)=e^x-(1+x)(x>0)$,

则 $h'(x)=e^x-1>0(x>0)$,

所以 $h(x)=g'(x)=e^x-(1+x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数， ……7 分

所以 $g'(x)>g'(0)=e^0-(1+0)=0$,

所以 $g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数， ……8 分

所以 $g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)>g(0)=0$,

所以 $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2\,(x>0)$. ……10 分

所以当 $x>0$ 时， $e^x\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+2x\right)>\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+2x\right)$

$$=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}\left[(x-1)^2+1\right]>0.$$

所以 $f(x)<x+\frac{1}{2}(x>0)$. ……12 分

方法 2：当 $a=1$ 时， $f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x}$,

所以 $f(x)<x+\frac{1}{2}(x>0)$ 等价于 $\frac{x^2+2x}{e^x}<x+\frac{1}{2}$,

即 $\frac{x}{e^x}-\frac{2x+1}{2(x+2)}<0(x>0)$, ……6 分

设 $g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2x+1}{2(x+2)}(x>0)$,

则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}-\frac{3}{2(x+2)^2}=\frac{2(1-x)(x+2)^2-3e^x}{2(x+2)^2e^x}$.

设 $h(x)=2(1-x)(x+2)^2-3e^x=2\left(-x^3-3x^2+4\right)-3e^x\,(x>0)$,

则 $h'(x)=2\left(-3x^2-6x\right)-3e^x<0(x>0)$,

所以函数 $h(x)=2\left(-x^3-3x^2+4\right)-3e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. ……8 分

因为 $h(0)=5>0$,

$h\left(\frac{3}{5}\right)=2\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}+2\right)^2-3e^{\frac{3}{5}}$

$<3\left(\frac{676}{375}-\left(1+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{25}+\frac{1}{6}\times\frac{27}{125}\right)\right)=3\left(\frac{676}{375}-\frac{454}{250}\right)=-\frac{1}{25}<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，

即 $2\left(-x_0^3-3x_0^2+4\right)-3e^{x_0}=0$.

所以当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)>0,g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是增函数；

当 $x>x_0$ 时，$h(x)<0,g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上是减函数，

所以当 $x=x_0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值也是最大值.

所以 $g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{x_0}{e^{x_0}}-\frac{2x_0+1}{2(x_0+2)}$，

又因为 $2(1-x_0)(x_0+2)^2-3e^{x_0}=0$，所以 $e^{x_0}=\frac{2}{3}(1-x_0)(x_0+2)^2$，

所以 $g(x)_{\max}=\frac{3x_0}{2(1-x_0)(x_0+2)^2}-\frac{2x_0+1}{2(x_0+2)}=\frac{2x_0^3+3x_0^2-2}{2(1-x_0)(x_0+2)^2}$.　　……10 分

因为 $x_0\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$，且函数 $y=2x^3+3x^2-2$ 在 $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ 上是增函数.

所以 $2(1-x_0)(x_0+2)^2>0$，$2x_0^3+3x_0^2-2<2\left(\frac{3}{5}\right)^3+3\left(\frac{3}{5}\right)^2-2=-\frac{61}{125}<0$，

所以 $g(x)_{\max}=\frac{2x_0^3+3x_0^2-2}{2(1-x_0)(x_0+2)^2}<0$.

所以 $g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2x+1}{2(x+2)}<0$，即得 $f(x)<x+\frac{1}{2}(x>0)$.

关于我们