遂宁市高中 2023 届三诊考试

数学（文科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	B	B	C	A	D	B

二、填空题（4×5=20 分

13．-7　　14．$\frac{1}{2}$　　15．$\frac{7\sqrt{7}}{6}\pi$　　16．$\sqrt{2}$

三、解答题

17.（12 分）

（1））根据列联表代入计算可得：

$K^2=\frac{100\times\left(40\times30-20\times10\right)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}\approx16.667>6.635$，……………………5 分

所以有 99% 的把握认为学生得“党史学习之星”与年级有关．……………………6 分

（2）由题意可知，所抽取的 6 名学生高一年级有 4 人，记为 A_1， A_2， A_3，

A_4，

高二年级有 2 人，设为甲、乙．……………………7 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的所有基本事件有$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,A_4\}$，$\{A_1,甲\}$，$\{A_1,乙\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,A_4\}$，$\{A_2,甲\}$，$\{A_2,乙\}$，$\{A_3,A_4\}$，$\{A_3,甲\}$，$\{A_3,乙\}$，$\{A_4,甲\}$，$\{A_4,乙\}$，$\{甲,乙\}$，共 15 个，……………………9 分

其中至少有一人是高二年级基本事件有$\{A_1,甲\}$，$\{A_2,甲\}$，$\{A_3,甲\}$，$\{A_4,甲\}$，$\{甲,乙\}$，$\{A_1,乙\}$，$\{A_2,乙\}$，$\{A_3,乙\}$，$\{A_4,乙\}$，共 9 个．……………………11 分

故至少有一人是高二年级的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$．……………………12

分

18．（12 分）

解：（1）在ΔABC中因为 $bcosA+acosB=2ccosA.$

由正弦定理得$\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos A$，

所以

$\sin(A+B)=2\sin C\cos A$……………………………………………2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$．故有

$\sin C=2\sin C\cos A$…4 分

又C是ΔABC的内角，所以$\sin C\neq 0$．从而$\cos A=\dfrac{1}{2}$．

而 A 为 ΔABC的内角，所以

$A=\dfrac{\pi}{3}$…………………………………………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DC}$所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$所以

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$…8 分

从而

$9=\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow 9=\dfrac{1}{16}c^2+\dfrac{9}{16}b^2+\dfrac{3}{16}bc$………10 分

由基本不等式可得：$9\geq\dfrac{3}{8}bc+\dfrac{3}{16}bc=\dfrac{9}{16}bc$，当且仅当

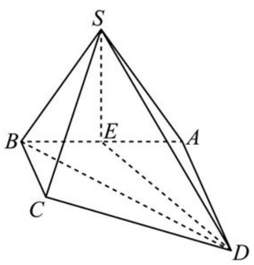
$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3},c=4\sqrt{3}$时等号成立

故 ΔABC的面积的最大值为

$\dfrac{1}{2}\times 16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$…………………………12 分

19.（12 分）

（1）取AB得中点E，连接SE,DE，如图所示：



因为$\angle DAB=\angle ABC=2\angle ABD=90^\circ$，所以$AB=AD$，因为$\triangle SAB$的面积为$\sqrt{3}$，所以$AB=AD=2$．在$\Delta SDE$中，$SE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},SD=2\sqrt{2},DE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，因为$SE^2+DE^2=SD^2$，所以$SE\perp DE$，………………2 分

因为$\triangle SAB$是等边三角形，E为线段AB的中点，所以$SE\perp AB$，又因为$AB\cap DE=E$，$AB,DE\subset$平面$ABCD$，所以$SE\perp$平面$ABCD$，………………4 分

$AD\subset$平面$ABCD,\therefore SE\perp AD,$

$AD\perp AB,SE\cap AB=E,\therefore AD\perp$平面$SAB$,又$\because SB\subset$平面$SAB$,

$\therefore$直线$AD\perp SB$………………6 分

（2）由（1）知$SE\perp$平面$ABCD$，所以 SE 为四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高，

又$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，

故三棱锥$S-BCD$的体积$V=\frac{1}{3}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……9 分

又因为 $SB=2$, $SD=BD=2\sqrt{2}$

$\therefore S_{\Delta BDS}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$

$\therefore V_{C-SBD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BDS}\cdot h=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times h=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore h=\frac{\sqrt{21}}{7}$

……12 分

20．（12 分）

解：（1）由已知$|F_1F_2|=4$得$c=2$，………………1 分

又$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times4\times b=4$，$b=2$，$\therefore$

$a=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. …………………………3 分

所以椭圆的标准方程为

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………5 分

（2）由（1）知 F_1 的坐标为 $\left(-2,0\right)$，

①当直线 l 的斜率不存在时，$|AB|=2\sqrt{2}$，$|OQ|^2=8$，则 $\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}=1$…………6 分

②当直线 l 的斜率存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y=k\left(x+2\right)$ 且 $k\neq 0$，

联立 $\begin{cases} y=k(x+2) \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $\left(2k^2+1\right)x^2+8k^2x+8k^2-8=0$，

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{2k^2+1}$，

$x_1x_2=\dfrac{8k^2-8}{2k^2+1}$，………………7 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{2k^2+1}\right)^2-4\times\dfrac{8k^2-8}{2k^2+1}}=\dfrac{4\sqrt{2}\left(k^2+1\right)}{2k^2+1}$，………………8 分

设点 $Q(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{k}$，即 $x_0=-ky_0$，代入椭圆方程得

$\dfrac{\left(-ky_0\right)^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$，

解得 $y_0^2=\dfrac{8}{k^2+2}$，$x_0^2=\dfrac{8k^2}{k^2+2}$，所以

$|OQ|^2=x_0^2+y_0^2=\dfrac{8\left(k^2+1\right)}{k^2+2}$，………………9 分

所以 $\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}=\dfrac{\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{2k^2+1}}{\dfrac{8\left(k^2+1\right)}{k^2+2}}=\dfrac{2k^2+4}{2k^2+1}=\dfrac{3}{2k^2+1}+1$，………………10 分

又 $2k^2+1>1$，所以 $\dfrac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的取值范围是 $\left(1,4\right)$.………………11 分

综上所述，$\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$的取值范围是$[1,4)$.………………12 分

21．（12 分）

解：$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-x-1=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$，………………1 分

由$f'(x)>0$可得：$x<-1$或$x>0$；由$f'(x)<0$可得$-1<x<0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递增，在$(-1,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增，

所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$，单调减区间为$(-1,0)$……………3 分

所以$f(x)_{极大值}=f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$，在$x=-1$时取极大值………………5 分

（2）$f(x)\geq \ln x+(a-2)x-\frac{1}{2}x^2+1$恒成立等价于$x-\ln x+xe^x-ax-1\geq 0$恒成立.…………6 分

因为$x>0$，所以$a\leq\frac{x-\ln x+xe^x-1}{x}$.………………7 分

令$g(x)=\frac{x-\ln x+xe^x-1}{x}$，则$g'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令$h(x)=x^2e^x+\ln x$，则$h'(x)=e^x(x^2+2x)+\frac{1}{x}>0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，………………8 分

又$h(1)=e>0$，$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，

所以$\exists x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$使得$h(x_0)=0$，即$x_0^2\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0=0$.

所以当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

所以$g\left(x\right)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0-\ln x_0+x_0e^{x_0}-1}{x_0}$.………………10 分

由${x_0}^2e^{x_0}+\ln x_0=0$可得$x_0e^{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

而$y=xe^x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，所以$x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，即$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

所以$g\left(x\right)_{\min}=\dfrac{x_0-\ln x_0+x_0e^{x_0}-1}{x_0}=\dfrac{x_0+x_0+1-1}{x_0}=2$，所以

$a\le 2$.………………12 分

22.（10 分）

（1）由曲线$C_1:\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$\theta\in\left[0,\pi\right]$），

消去参数θ，得$\left(x-2\right)^2+y^2=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta=4$……………2 分

所以曲线C_1的直角坐标方程为

$\left(x-2\right)^2+y^2=4(0\le y\le 2)$……………3 分

因为曲线C_2是以$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$为圆心的圆，且过极点 O，所以圆心为

$\left(0,1\right)$，半径为 1，

故C_2的直角坐标方程为：$x^2+\left(y-1\right)^2=1$，

即$x^2+y^2-2y=0$，将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入可得：圆$C_2$的极坐标方程为

$\rho=2\sin\theta$………5 分

（2）因为曲线C_1的直角坐标方程为$\left(x-2\right)^2+y^2=4(0\le y\le 2)$.即

$x^2+y^2-4x=0$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入化简可得$C_1$的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$

（$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$），

所以C_1的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$；$C_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$；

因为M、N是直线$l:\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathrm{R})$与曲线$C_1$、$C_2$的两个交点，

不妨设$M\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{4}\right),N\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{4}\right)$，　由（1）得$C_1$：$\rho=4\cos\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2$：$\rho=2\sin\theta$，

所以$\rho_1=4\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2},\rho_2=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，从而$|MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{2}$，……………10 分

23．**（10 分）**

（1）解：当$t=1$时，$f(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases}2x(x\ge1)\\2(-1\le x<1)\\-2x(x<-1)\end{cases}$，

Q $f(x)\le8-x^2$

当$x\ge1$时，即$\begin{cases}2x\le8-x^2\\x\ge1\end{cases}$，$\therefore 1\le x\le2$；

当$-1\le x<1$时，即$\begin{cases}2\le8-x^2\\-1\le x<1\end{cases}$，$\therefore -1\le x<1$；

当$x<-1$时，即$\begin{cases}-2x\le8-x^2\\x<-1\end{cases}$，$\therefore -2\le x<-1$，

综上可得不等式的解集为$[-2,2]$………………………………………………………5 分

（2）解：Q $f(x)=|x-t|+|x+t|\ge|(x-t)-(x+t)|=2|t|$，当且仅当$(x-t)(x+t)\le0$时取等号，

$\therefore f(x)_{\min}=2|t|$，…………………………………………6 分

又$m>0$，$n>0$且$m+n=4$，

$\therefore \frac{4m^2+n}{mn}=\frac{4m}{n}+\frac{1}{m}=\frac{4m}{n}+\frac{m+n}{4m}\geq\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{4m}}=\frac{9}{4}$

当且仅当$\frac{4m}{n}=\frac{n}{4m}$，即$m=\frac{4}{5}$，$n=\frac{16}{5}$时等号成立，

所以

$\frac{4m^2+n}{mn}\in\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$ ……………………………………………………………8

分

根据题意可得$\frac{9}{4}\leq 2|t|$，解得$t\geq\frac{9}{8}$或$t\leq-\frac{9}{8}$，

$\therefore t$的取值范围是

$\left(-\infty,-\frac{9}{8}\right]\cup\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$.…………………………………………10 分