

2023 年高三下学期 5 月三校联考  
高三数学试卷参考答案

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	C	C	D

二、选择题:

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ABC	ABD

三、填空题:

13. 8

14.  $(-\infty, 1]$

15. 190

16.  $\frac{64}{9}$

四、解答题:

17. 【解析】(1) 因为  $a_n a_{n+1} = 4S_n - 1$ , 所以  $a_{n+1} a_{n+2} = 4S_{n+1} - 1$ .

两式相减, 得  $a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 4a_{n+1}$ .

因为  $a_{n+1} \neq 0$ , 所以  $a_{n+2} - a_n = 4$ . 2 分

所以  $\{a_{2n-1}\}$  是以 1 为首项, 4 为公差的等差数列,  $\{a_{2n}\}$  是以 3 为首项, 4 为公差的等差数列.

所以  $a_{2n-1} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$ ,  $a_{2n} = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$ . 4 分

故  $a_n = 2n - 1$ . 5 分

(2) 因为  $\frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$ , 6 分

所以  $T_n = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$ . 8 分

因为  $S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$ , 所以  $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ . 10 分

18. 【解析】(1) 因为  $6S = b(a+c)$ , 所以  $6 \times \frac{1}{2} \times bc \sin A = b(a+c)$ , 1 分

因为  $\sin A = \frac{2}{3}$ , 代入上式可解得  $3c \times \frac{2}{3} = a+c$ , 即  $a=c$ , 3 分

所以  $\sin C = \sin A = \frac{2}{3}$ ,  $\cos C = \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , 4 分

所以  $\cos B = -\cos(A+C) = -\frac{1}{9}$ . 6 分

(2) 因为  $6S = b(a+c)$ , 所以  $6 \times \frac{1}{2} \times bc \sin A = b(a+c)$ , 即  $3bc \sin A = b(a+c)$ ,

因为  $b=3$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\frac{\sqrt{3}}{2} ac = a+c$ , 8 分

由余弦定理知  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 所以  $9 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac = \frac{3}{4}(ac)^2 - 3ac$ ,

解得  $ac = 6$ ,

10 分

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

12 分

19. 【解析】(1) 因为点  $D$  为棱  $AC$  的中点,  $DA = DB$ , 所以  $BC \perp AB$ .

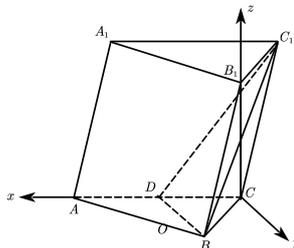
1 分

因为  $B_1C \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \subset$  平面  $ABC$ , 所以  $B_1C \perp AB$ .

又因为  $BC \cap B_1C = C$ ,  $BC, B_1C \subset$  平面  $BCC_1B_1$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .

因为  $CC_1 \subset$  平面  $BCC_1B_1$ , 所以  $AB \perp CC_1$ .



3 分

4 分

(2) 设  $CB_1 = t (t > 0)$ .

以  $CA$  为  $x$  轴,  $CB_1$  为  $z$  轴, 过点  $C$  与  $CA$  垂直的直线为  $y$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则  $C(0,0,0), A(4,0,0), D(2,0,0), B(1,\sqrt{3},0), B_1(0,0,t)$ .

5 分

所以  $\overline{BB_1} = (-1, -\sqrt{3}, t), \overline{BC} = (-1, -\sqrt{3}, 0), \overline{BD} = (1, -\sqrt{3}, 0)$ ,

6 分

设平面  $BDC_1$  的法向量为  $n = (x, y, z)$ , 所以  $\begin{cases} n \cdot \overline{BD} = x - \sqrt{3}y = 0, \\ n \cdot \overline{BC_1} = -2x - 2\sqrt{3}y + tz = 0. \end{cases}$

令  $x = \sqrt{3}t$ , 则  $y = t, z = 4\sqrt{3}$ . 所以  $n = (\sqrt{3}t, t, 4\sqrt{3})$ .

8 分

$$\text{所以 } \cos \langle \overline{BB_1}, n \rangle = \frac{\overline{BB_1} \cdot n}{|\overline{BB_1}| \cdot |n|} = \frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{4+t^2} \cdot \sqrt{4t^2+48}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2+16+t^2}}$$

10 分

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\sqrt{3}+16}} = \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad (\text{当且仅当 } \frac{48}{t^2} = t^2, \text{ 即 } t = 2\sqrt{3} \text{ 时, 等号成立}).$$

所以直线  $BB_1$  与平面  $BDC_1$  所成角的正弦的最大值为  $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ .

12 分

20. 【解析】(1) 第 85% 分位数  $= 45 + \frac{0.85-0.65}{0.3} \times 10 = 51.67$  (岁).

3 分

(2) 因为  $\bar{x} = (20 \times 0.01 + 30 \times 0.02 + 40 \times 0.035 + 50 \times 0.03 + 60 \times 0.005) \times 10 = 40$ ,

5 分

所以  $\mu = 40$ , 所以  $P(X > 61) = P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{1-0.9545}{2} = 0.02275$ ,

所以使用该 APP 且年龄大于 61 周岁的人数占左右喜欢使用该 APP 的 2.275%.

7 分

(3) 根据题意  $X \sim B(8, 0.2)$ , 要使  $P(X = k)$  取得最大值, 则  $\begin{cases} P(X = k) \geq P(X = k+1), \\ P(X = k) \geq P(X = k-1), \end{cases}$

9 分

$$\text{所以 } \begin{cases} C_8^k 0.2^k 0.8^{8-k} \geq C_8^{k+1} 0.2^{k+1} 0.8^{7-k}, \\ C_8^k 0.2^k 0.8^{8-k} \geq C_8^{k-1} 0.2^{k-1} 0.8^{9-k}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{4}{5} \leq k \leq \frac{9}{5},$$

因为  $k \in \mathbf{N}$ , 所以  $k = 1$ .

12 分

21. 【解析】(1) 设双曲线  $C$  的焦距为  $2c$ , 其中  $c^2 = a^2 + b^2$ , 则  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), H(1, 0)$ .

所以  $\overline{HF_1} = (-c-1, 0), \overline{HF_2} = (c-1, 0)$ .

1 分

由  $\overline{HF_1} + 3\overline{HF_2} = \mathbf{0}$ , 有  $-c-1+3(c-1)=0$ , 得  $c=2$ . 所以  $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$ .

2 分

因为双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \frac{b}{a}x$ , 有  $T(1, \frac{b}{a})$ ,

所以  $\overline{TF}_1 = (-3, -\frac{b}{a})$ ,  $\overline{TF}_2 = (1, -\frac{b}{a})$ .

由  $\overline{TF}_1 \cdot \overline{TF}_2 = -2$ , 有  $-3 + \frac{b^2}{a^2} = -2$ , 即  $-3 + \frac{4-a^2}{a^2} = -2$ , 得  $a^2 = 2$ . 4分

所以  $b^2 = c^2 - a^2 = 2$ . 所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ . 5分

(2) 设  $AB$  的方程为  $y = k(x-1)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .

联立方程组  $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$  得  $(1-k^2)x^2 + 2k^2x - k^2 - 2 = 0$ .

所以  $1-k^2 \neq 0$ ,  $\Delta = 4k^4 - 4(1-k^2)(-k^2-2) > 0$ ,  $x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{k^2-1}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{k^2+2}{k^2-1}$ . 7分

所以  $k_{AF_2} + k_{BF_2} = \frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{k(x_1-1)}{x_1-2} + \frac{k(x_2-1)}{x_2-2} = k \times \frac{2x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 4}{(x_1-2)(x_2-2)}$   
 $= \frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)} [2 \times \frac{k^2+2}{k^2-1} - 3 \times \frac{2k^2}{k^2-1} + 4] = 0$ . 10分

所以  $k_{BF_2} = -k_{AF_2}$ , 即  $\angle MF_2H = \angle NF_2H$ .

因为  $MN \perp HF_2$ , 所以  $HM = HN$ . 12分

22. 【解析】(1) ① 因为  $f(x) = e^x + b \sin x$ , 所以  $f'(x) = e^x + b \cos x$ .

所以切线的斜率  $k = f'(0) = 1 + b$ .

又因为切线的斜率为 2, 所以  $1 + b = 2$ . 解得  $b = 1$ . 2分

② 由①得  $b = 1$ , 所以  $f(x) = e^x + \sin x, x \in (-\pi, +\infty)$ ,  $f'(x) = e^x + \cos x$ .

因为  $f''(x) = e^x - \sin x > 0$  恒成立, 所以  $f'(x)$  单调递增. 3分

又  $f'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$ ,  $f'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$ , 所以存在  $x_0 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ , 使  $f'(x_0) = e^{x_0} + \cos x_0 = 0$ .

$x$	$(-\pi, x_0)$	$x_0$	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以  $f(x)$  存在唯一的极小值点  $x_0$ ,  $f(x_0) = e^{x_0} + \sin x_0 = \sin x_0 - \cos x_0 = \sqrt{2} \sin(x_0 - \frac{\pi}{4})$ . 5分

因为  $x_0 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ , 所以  $x_0 - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4})$ . 所以  $\sqrt{2} \sin(x_0 - \frac{\pi}{4}) \in (-1, 1)$ .

所以  $f(x_0) > -1$ . 6分

(2)  $f(x) = e^x + b \sin x, x \in (-\pi, +\infty)$ .

令  $f(x) = 0$ , 即  $e^x + b \sin x = 0$ , 所以  $-\frac{1}{b} = \frac{\sin x}{e^x}$ .

令  $g(x) = \frac{\sin x}{e^x}, x \in (-\pi, +\infty)$ , 则  $g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} = -\frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{e^x}$ .

令  $g'(x)=0$ ，得  $x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\geq -1, k\in\mathbf{Z}$ .

7分

所以当  $x\in(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi)$  时， $\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$ ， $g(x)$  单调递减；

当  $x\in(\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{9\pi}{4}+2k\pi)$  时， $\sin(x-\frac{\pi}{4})<0$ ， $g(x)$  单调递增.

所以当  $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k\geq -1, k\in\mathbf{Z}$  时， $g(x)$  取得极小值.

即当  $x=-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$  时， $g(x)$  取得极小值.

9分

又因为  $\sin(-\frac{3\pi}{4})=\sin\frac{5\pi}{4}=\dots=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $-\frac{3\pi}{4}<(\frac{5\pi}{4})<\dots$ ，所以  $g(-\frac{3\pi}{4})<g(\frac{5\pi}{4})<\dots$ .

又因为在  $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$  上  $g(x)$  单调递减，所以  $g(x)\geq g(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ .

10分

当  $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\geq 0, k\in\mathbf{Z}$  时， $g(x)$  取得极大值，即当  $x=\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$  时， $g(x)$  取得极大值.

又因为  $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{9\pi}{4}=\dots=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $e^{\frac{\pi}{4}}<e^{\frac{9\pi}{4}}<\dots$ ，所以  $g(\frac{\pi}{4})>g(\frac{9\pi}{4})>\dots$ .

所以  $g(x)\leq g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ .

11分

当  $(-\pi, +\infty)$  时， $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leq g(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ .

所以  $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leq-\frac{1}{b}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ .

因为  $b>0$ ，所以  $b\geq\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$  时， $f(x)$  在  $(-\pi, +\infty)$  上有零点.

所以实数  $b$  的取值范围为  $[\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}, +\infty)$ .

12分