

2023 年高三下学期 5 月三校联考
高三数学试卷参考答案

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	C	C	D

二、选择题:

题号	9	10	11	12
答案	BC	ACD	ABC	ABD

三、填空题:

13. 8

14. $(-\infty, 1]$

15. 190

16. $\frac{64}{9}$

四、解答题:

17. 【解析】(1) 因为 $a_n a_{n+1} = 4S_n - 1$, 所以 $a_{n+1} a_{n+2} = 4S_{n+1} - 1$.

两式相减, 得 $a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 4a_{n+1}$.

因为 $a_{n+1} \neq 0$, 所以 $a_{n+2} - a_n = 4$. 2 分

所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项, 4 为公差的等差数列, $\{a_{2n}\}$ 是以 3 为首项, 4 为公差的等差数列.

所以 $a_{2n-1} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$, $a_{2n} = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$. 4 分

故 $a_n = 2n - 1$. 5 分

(2) 因为 $\frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$, 6 分

所以 $T_n = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$. 8 分

因为 $S_n = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$, 所以 $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. 10 分

18. 【解析】(1) 因为 $6S = b(a+c)$, 所以 $6 \times \frac{1}{2} \times bc \sin A = b(a+c)$, 1 分

因为 $\sin A = \frac{2}{3}$, 代入上式可解得 $3c \times \frac{2}{3} = a+c$, 即 $a=c$, 3 分

所以 $\sin C = \sin A = \frac{2}{3}$, $\cos C = \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 4 分

所以 $\cos B = -\cos(A+C) = -\frac{1}{9}$. 6 分

(2) 因为 $6S = b(a+c)$, 所以 $6 \times \frac{1}{2} \times bc \sin A = b(a+c)$, 即 $3bc \sin A = b(a+c)$,

因为 $b=3$, $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} ac = a+c$, 8 分

由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 所以 $9 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac = \frac{3}{4}(ac)^2 - 3ac$,

解得 $ac = 6$,

10 分

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

12 分

19. 【解析】(1) 因为点 D 为棱 AC 的中点, $DA = DB$, 所以 $BC \perp AB$.

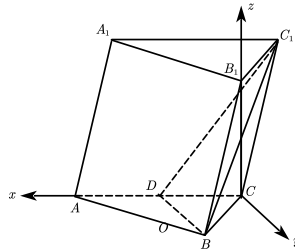
1 分

因为 $B_1C \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $B_1C \perp AB$.

又因为 $BC \cap B_1C = C$, $BC, B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AB \perp CC_1$.



3 分

4 分

(2) 设 $CB_1 = t (t > 0)$.

以 CA 为 x 轴, CB_1 为 z 轴, 过点 C 与 CA 垂直的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $C(0,0,0), A(4,0,0), D(2,0,0), B(1,\sqrt{3},0), B_1(0,0,t)$.

5 分

所以 $\overline{BB_1} = (-1, -\sqrt{3}, t), \overline{BC} = (-1, -\sqrt{3}, 0), \overline{BD} = (1, -\sqrt{3}, 0)$,

6 分

设平面 BDC_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 所以 $\begin{cases} n \cdot \overline{BD} = x - \sqrt{3}y = 0, \\ n \cdot \overline{BC_1} = -2x - 2\sqrt{3}y + tz = 0. \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}t$, 则 $y = t, z = 4\sqrt{3}$. 所以 $n = (\sqrt{3}t, t, 4\sqrt{3})$.

8 分

$$\text{所以 } \cos \langle \overline{BB_1}, n \rangle = \frac{\overline{BB_1} \cdot n}{|\overline{BB_1}| \cdot |n|} = \frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{4+t^2} \cdot \sqrt{4t^2+48}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t^2+16+t^2}}$$

10 分

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\sqrt{3}+16}} = \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \quad (\text{当且仅当 } \frac{48}{t^2} = t^2, \text{ 即 } t = 2\sqrt{3} \text{ 时, 等号成立}).$$

所以直线 BB_1 与平面 BDC_1 所成角的正弦的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

12 分

20. 【解析】(1) 第 85% 分位数 $= 45 + \frac{0.85-0.65}{0.3} \times 10 = 51.67$ (岁).

3 分

(2) 因为 $\bar{x} = (20 \times 0.01 + 30 \times 0.02 + 40 \times 0.035 + 50 \times 0.03 + 60 \times 0.005) \times 10 = 40$,

5 分

所以 $\mu = 40$, 所以 $P(X > 61) = P(X > \mu + 2\sigma) = \frac{1-0.9545}{2} = 0.02275$,

所以使用该 APP 且年龄大于 61 周岁的人数占左右喜欢使用该 APP 的 2.275%.

7 分

(3) 根据题意 $X \sim B(8, 0.2)$, 要使 $P(X = k)$ 取得最大值, 则 $\begin{cases} P(X = k) \geq P(X = k+1), \\ P(X = k) \geq P(X = k-1), \end{cases}$

9 分

$$\text{所以 } \begin{cases} C_8^k 0.2^k 0.8^{8-k} \geq C_8^{k+1} 0.2^{k+1} 0.8^{7-k}, \\ C_8^k 0.2^k 0.8^{8-k} \geq C_8^{k-1} 0.2^{k-1} 0.8^{9-k}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{4}{5} \leq k \leq \frac{9}{5},$$

因为 $k \in \mathbf{N}$, 所以 $k = 1$.

12 分

21. 【解析】(1) 设双曲线 C 的焦距为 $2c$, 其中 $c^2 = a^2 + b^2$, 则 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), H(1, 0)$.

所以 $\overline{HF_1} = (-c-1, 0), \overline{HF_2} = (c-1, 0)$.

1 分

由 $\overline{HF_1} + 3\overline{HF_2} = \mathbf{0}$, 有 $-c-1+3(c-1)=0$, 得 $c=2$. 所以 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$.

2 分

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 有 $T(1, \frac{b}{a})$,

所以 $\overline{TF}_1 = (-3, -\frac{b}{a})$, $\overline{TF}_2 = (1, -\frac{b}{a})$.

由 $\overline{TF}_1 \cdot \overline{TF}_2 = -2$, 有 $-3 + \frac{b^2}{a^2} = -2$, 即 $-3 + \frac{4-a^2}{a^2} = -2$, 得 $a^2 = 2$. 4分

所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 2$. 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$. 5分

(2) 设 AB 的方程为 $y = k(x-1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2 + 2k^2x - k^2 - 2 = 0$.

所以 $1-k^2 \neq 0$, $\Delta = 4k^4 - 4(1-k^2)(-k^2-2) > 0$, $x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{k^2-1}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{k^2+2}{k^2-1}$. 7分

所以 $k_{AF_2} + k_{BF_2} = \frac{y_1}{x_1-2} + \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{k(x_1-1)}{x_1-2} + \frac{k(x_2-1)}{x_2-2} = k \times \frac{2x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 4}{(x_1-2)(x_2-2)}$
 $= \frac{k}{(x_1-2)(x_2-2)} [2 \times \frac{k^2+2}{k^2-1} - 3 \times \frac{2k^2}{k^2-1} + 4] = 0$. 10分

所以 $k_{BF_2} = -k_{AF_2}$, 即 $\angle MF_2H = \angle NF_2H$.

因为 $MN \perp HF_2$, 所以 $HM = HN$. 12分

22. 【解析】(1) ① 因为 $f(x) = e^x + b \sin x$, 所以 $f'(x) = e^x + b \cos x$.

所以切线的斜率 $k = f'(0) = 1 + b$.

又因为切线的斜率为 2, 所以 $1 + b = 2$. 解得 $b = 1$. 2分

② 由①得 $b = 1$, 所以 $f(x) = e^x + \sin x, x \in (-\pi, +\infty)$, $f'(x) = e^x + \cos x$.

因为 $f''(x) = e^x - \sin x > 0$ 恒成立, 所以 $f'(x)$ 单调递增. 3分

又 $f'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, $f'(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$, 所以存在 $x_0 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$, 使 $f'(x_0) = e^{x_0} + \cos x_0 = 0$.

x	$(-\pi, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $f(x)$ 存在唯一的极小值点 x_0 , $f(x_0) = e^{x_0} + \sin x_0 = \sin x_0 - \cos x_0 = \sqrt{2} \sin(x_0 - \frac{\pi}{4})$. 5分

因为 $x_0 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$, 所以 $x_0 - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4})$. 所以 $\sqrt{2} \sin(x_0 - \frac{\pi}{4}) \in (-1, 1)$.

所以 $f(x_0) > -1$. 6分

(2) $f(x) = e^x + b \sin x, x \in (-\pi, +\infty)$.

令 $f(x) = 0$, 即 $e^x + b \sin x = 0$, 所以 $-\frac{1}{b} = \frac{\sin x}{e^x}$.

令 $g(x) = \frac{\sin x}{e^x}, x \in (-\pi, +\infty)$, 则 $g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} = -\frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{e^x}$.

令 $g'(x)=0$ ，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k \geq -1, k \in \mathbf{Z}$.

7分

所以当 $x \in (\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi)$ 时， $\sin(x-\frac{\pi}{4}) > 0$ ， $g(x)$ 单调递减；

当 $x \in (\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{9\pi}{4}+2k\pi)$ 时， $\sin(x-\frac{\pi}{4}) < 0$ ， $g(x)$ 单调递增.

所以当 $x = \frac{5\pi}{4}+2k\pi, k \geq -1, k \in \mathbf{Z}$ 时， $g(x)$ 取得极小值.

即当 $x = -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$ 时， $g(x)$ 取得极小值.

9分

又因为 $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{5\pi}{4} = \dots = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $-\frac{3\pi}{4} < (\frac{5\pi}{4}) < \dots$ ，所以 $g(-\frac{3\pi}{4}) < g(\frac{5\pi}{4}) < \dots$.

又因为在 $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$ 上 $g(x)$ 单调递减，所以 $g(x) \geq g(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

10分

当 $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi, k \geq 0, k \in \mathbf{Z}$ 时， $g(x)$ 取得极大值，即当 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$ 时， $g(x)$ 取得极大值.

又因为 $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{9\pi}{4} = \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $e^{\frac{\pi}{4}} < e^{\frac{9\pi}{4}} < \dots$ ，所以 $g(\frac{\pi}{4}) > g(\frac{9\pi}{4}) > \dots$.

所以 $g(x) \leq g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

11分

当 $(-\pi, +\infty)$ 时， $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \leq g(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \leq -\frac{1}{b} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$.

因为 $b > 0$ ，所以 $b \geq \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ 时， $f(x)$ 在 $(-\pi, +\infty)$ 上有零点.

所以实数 b 的取值范围为 $[\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}, +\infty)$.

12分