学校________ 班级________ 姓名________ 考号________

密 封 线 内 不 要 答 题

2021～2022学年高三核心模拟卷(中)

文科数学(三)

注意事项：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数z满足$iz+2=3z-2i$（i为虚数单位），则z在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\left\{x\left|\frac{4-x}{x+1}\geqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数$a$的取值范围是

A. $(2,+\infty)$　　B. $\{1\}\cup(2,+\infty)$　　C. $\{1\}\cup[2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

3. 某车间主任为了预估该车间一天加工零件的个数，需要测试加工零件所花费的时间，为此进行了5次试验，这5次试验的数据如下表：

零件数x(个)	10	20	30	40
加工时间y(分钟)	28	60	92	120

若用最小二乘法求得回归直线方程为$\hat{y}=3.08x+\hat{a}$，则估计加工这样的零件100个需要的时间是

A. 306分钟　　B. 310分钟　　C. 320分钟　　D. 324分钟

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_5+2a_{10}+a_{13}=18$，则$S_{18}=$

A. 74　　B. 81　　C. 162　　D. 148

5. 已知直线$y=-3x+m$是曲线$y=x^3-3x^2-4$的一条切线，则实数$m=$

A. -4　　B. -3　　C. 1　　D. 2

6. 已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，则$\frac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$的值是

A. $-\frac{16\sqrt{3}}{7}$　　B. $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　　D. $\frac{16\sqrt{3}}{7}$

7. 中心在原点，焦点在坐标轴上的双曲线 C 与椭圆$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$有相同的焦距，一条渐近线方程为 $x-\sqrt{3}y=0$，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$　　D. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$

8. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x_1)=2$，$f(x_2)=-2$，若 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 1，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为

A. $\left[-\frac{3}{8}+k,\frac{1}{8}+k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　B. $\left[-\frac{3}{4}+2k,\frac{1}{4}+2k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[\frac{1}{4}+2k,\frac{7}{4}+2k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　D. $\left[\frac{1}{8}+k,\frac{7}{8}+k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3n+1$，则 $S_{101}=$

A. 7 449　　B. 14 897　　C. 7 701　　D. 15 401

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 与 x 轴和 y 轴分别相切于 A，B 两点，点 M，N 分别在线段 OA，OB 上，且 MN 与圆 C 相切，则 $|MN|$ 的最小值为

A. $2+\sqrt{2}$　　B. $2-\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}+4$　　D. $4\sqrt{2}-4$

11. 已知点 A，B，C，D 在同一个球的球面上，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AC=2$，若四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{6}$，则这个球的表面积是

A. $\frac{144\pi}{25}$　　B. $\frac{248\pi}{25}$　　C. $\frac{576\pi}{25}$　　D. $\frac{676\pi}{25}$

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 上不与左、右顶点重合的一点，I 为$\triangle PF_1F_2$ 的内心，且 $3\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{PI}$，则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{ED}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x-a,x<2,\\3^x,x\geqslant 2,\end{cases}$ 若 $f(f(1))=9$，则实数 $a=$________.

15. 若实数 x，y 满足不等式组$\begin{cases}x-2y+1\geqslant 0,\\y\geqslant x,\\x\geqslant -1,\end{cases}$ 则$(x-1)^2+y^2$ 的最小值是__________.

16. 若 $xe^{2x-2}=\frac{1}{2}$，$\frac{e}{y}-\ln y=1$，则 $xy=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且$\sqrt{3}a\sin B=b(2+\cos A)$.

(1)求角 A 的大小；

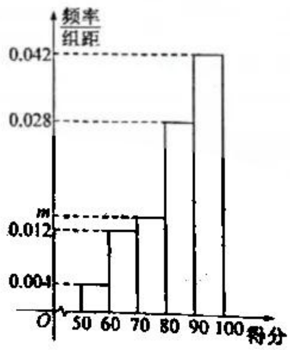
(2)若 $a=2\sqrt{3}$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$,$AD$ 是△ABC 的角平分线，求 AD 的长.

18.(本小题满分 12 分)

2021 年 10 月 1 日是中华人民共和国成立 72 周年.某校举行了爱国知识竞赛，为了解本次竞赛成绩情况，随机抽取了 100 名学生的成绩(满分 100 分，最低分不低于 50 分)进行统计，得出频率分布直方图如图所示：

(1)求实数 m 的值，并估计这 100 名学生的成绩的平均数(同一组数据用该区间的中点值作代表)；

(2)若用分层抽样的方法在[70,80)、[80,90)、[90,100]这三组中抽取 6 人担任爱国知识宣传员，再从这 6 人中随机选出 2 人负责整理爱国知识相关材料，求这 2 人中至少有 1 人来自[80,90)组的概率.

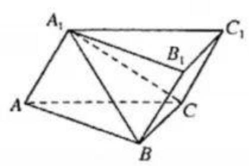


19.(本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $AA_1C_1C\perp$平面 ABC,$AC\perp BC$,$AA_1\perp A_1B$.

(1)求证：$AA_1\perp A_1C$；

(2)若 $AA_1=2$,$BC=3$,$AC=4$，求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离.



20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(x^2-x+1)\cdot e^{-x}$.

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)若不等式 $f(x)\geqslant -x^2+2x+m$ 对任意的 $x\in[0,+\infty)$恒成立,求实数 m 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,过点 F 的直线 l 与 C 相交于不同的 A,B 两点,且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$.

(1)求 C 的方程;

(2)若线段 AB 的垂直平分线 l'与 C 相交于 M,N 两点,且$\angle AMB+\angle ANB=180°$,求直线 l 的方程.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程是$\begin{cases}x=\sqrt{3}-\frac{1}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若点 P 是曲线 C 上的一点,点 P 到直线 l 和 x 轴的距离分别为 d_1,d_2,求 d_1+d_2 的最大值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x-a|-|3x-1|\left(a>\frac{1}{3}\right)$.

(1)当 $a=1$ 时,解不等式 $f(x)<-7$;

(2)若 $g(x)=x^2+2$,对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,不等式 $g(x_1)\geqslant f(x_2)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

密 封 内 不 要 答 题

2021～2022 学年高三核心模拟卷(中)

文科数学(三)参考答案

1. A　由 $iz+2=3z-2i$，得 $z(3-i)=2+2i$，$z=\frac{2+2i}{3-i}=\frac{(2+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$，所以 z 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

2. C　由题意 $A=\left\{x\left|\frac{4-x}{x+1}\geqslant 0\right.\right\}=(-1,4]$，$B=\{x|x^2-(a+1)^2x+2a(a^2+1)<0\}=\{x|(x-2a)(x-a^2-1)<0\}$，当 $B=\varnothing$ 时，$2a=a^2+1$，即 $a=1$，符合题意；当 $B\neq\varnothing$，即 $a\neq 1$ 时，$B=(2a,a^2+1)$，则有 $2a\geqslant 4$ 或 $a^2+1\leqslant -1$，即 $a\geqslant 2$. 综上，实数 a 的取值范围为 $\{1\}\cup[2,+\infty)$. 故选 C.

3. A　由已知 $\bar{x}=\frac{10+20+30+40}{4}=25$，$\bar{y}=\frac{28+60+92+120}{4}=75$，所以 $75=3.08\times 25+\hat{a}$，$\hat{a}=-2$. 当 $x=100$ 时，$\hat{y}=3.08\times 100-2=306$(分钟). 故选 A.

4. B　因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_5+2a_{10}+a_{13}=2a_9+2a_{10}=18$，即 $a_9+a_{10}=9$，所以 $S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=\frac{18\times(a_9+a_{10})}{2}=81$. 故选 B.

5. B　$\because y=x^3-3x^2-4$，$\therefore y'=3x^2-6x$. $\because$ 直线 $y=-3x+m$ 是曲线 $y=x^3-3x^2-4$ 的一条切线，$\therefore k=3x^2-6x=-3$，解得 $x=1$，即切点的横坐标为 1，代入曲线方程得切点坐标为 $(1,-6)$，$\because$ 切点 $(1,-6)$ 在切线上，$\therefore -6=-3\times 1+m$，解得 $m=-3$. 故选 B.

6. D　$\because \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$，整理得 $2\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\therefore \frac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha-\frac{1}{2}}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha-\frac{1}{2}}\times\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha-\frac{1}{2}}\times\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\times\frac{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}=\frac{16\sqrt{3}}{7}$. 故选 D.

7. A　$\because$ 椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 中，$c=\sqrt{10-6}=2$，$\therefore$ 焦距 $2c=4$. $\because C$ 的一条渐近线方程为 $x-\sqrt{3}y=0$，$\therefore$ 设 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$，化为标准方程为 $\frac{x^2}{3\lambda}-\frac{y^2}{\lambda}=1$. 当 $\lambda>0$ 时，$c=\sqrt{\lambda+3\lambda}=2$，解得 $\lambda=1$，则 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. 当 $\lambda<0$ 时，$c=\sqrt{-\lambda-3\lambda}=2$，解得 $\lambda=-1$，则 C 的方程为 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$. 综上，C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$. 故选 A.

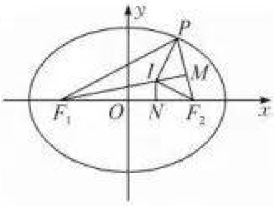
8. B　由题意可得：$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=1$，则 $T=2$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sqrt{2}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $2k-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 2k+\frac{1}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3}{4}+2k,\frac{1}{4}+2k\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 B.

9. C　由题意知 $S_{101}=a_1+a_2+\cdots+a_{101}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{100}+a_{101})=1+(3\times 2+1)+(3\times 4+1)+\cdots+(3\times 100+1)=1+\frac{(7+301)\times 50}{2}=7\ 701$. 故选 C.

10. D　因为 MN 与圆 C 相切，设切点为 Q，所以 $|AM|+|BN|=|QM|+|QN|=|MN|$. 设 $\angle MNO=\theta$，则 $|OM|+|ON|=|MN|\cos\theta+|MN|\sin\theta$，$|OA|+|OB|=4=|MN|(1+\cos\theta+\sin\theta)$，$|MN|=\frac{4}{1+\cos\theta+\sin\theta}=\frac{4}{1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\geqslant\frac{4}{1+\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-4$. 故选 D.

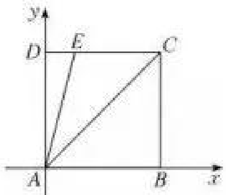
11. D　因为 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，面积为 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以当四面体 $ABCD$ 体积取得最大值时，高取得最大值. 设四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 R，则 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times(R+\sqrt{R^2-1})=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(R+\sqrt{R^2-1})=\frac{5\sqrt{3}}{6}$，解得 $R=\frac{13}{5}$. 所以球的表面积为 $S=4\pi\left(\frac{13}{5}\right)^2=\frac{676\pi}{25}$. 故选 D.

12. B　设 M 是 PF_2 的中点，连接 IM，如图，则 $\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{IM}$，由 $3\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{PI}$，得 $3\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}+2\overrightarrow{IP}=3\overrightarrow{IF_1}+4\overrightarrow{IM}=\mathbf{0}$，∴ F_1，I，M 三点共线，$3\overrightarrow{IF_1}=4\overrightarrow{MI}$，∴ $\frac{|F_1I|}{|IM|}=\frac{4}{3}$.



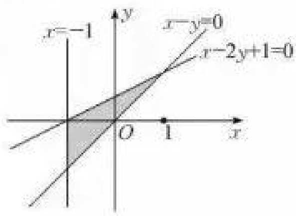
由 F_1M 既是 $\angle PF_1F_2$ 的平分线，又是 PF_2 边上的中线，得 $F_1M\perp PF_2$，$|PF_1|=|F_1F_2|=2c$，∴ $|PF_2|=2a-2c$，$|MF_2|=a-c$. 作 $IN\perp x$ 轴于点 N，则 $\mathrm{Rt}\triangle F_1IN\sim\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$，且 $|IN|=|IM|$，∴ $\frac{|F_1I|}{|IN|}=\frac{|F_1I|}{|IM|}=\frac{|F_1F_2|}{|MF_2|}=\frac{4}{3}=\frac{2c}{a-c}$，∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$. 故选 B.

13. 20　以 A 为坐标原点，建立如图所示平面直角坐标系. 则 $A(0,0)$，$E(1,4)$，$C(4,4)$，$\overrightarrow{AE}=(1,4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,4)$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=20$.



14. 1　∵ $1<2$，∴ $f(1)=3\times1-a=3-a$. 当 $3-a<2$，即 $a>1$ 时，$f(f(1))=f(3-a)=3\times(3-a)-a=9-4a=9$，则 $a=0$，与 $a>1$ 相矛盾，舍去. 当 $3-a\geq2$，即 $a\leq1$ 时，$f(f(1))=f(3-a)=3^{3-a}=9$，则 $3-a=2$，即 $a=1$，满足 $a\leq1$.

15. $\frac{1}{2}$　画出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，$(x-1)^2+y^2$ 的几何意义是阴影部分内的点到点 $(1,0)$ 的距离的平方，显然点 $(1,0)$ 到直线 $x-y=0$ 的距离最小，所以 $[(x-1)^2+y^2]_{\min}=\left(\frac{|1-0|}{\sqrt{1+1}}\right)^2=\frac{1}{2}$.



16. $\frac{e}{2}$　由 $xe^{2x-2}=\frac{1}{2}$，两边取以 e 为底的对数，得 $2x-2+\ln x=\ln\frac{1}{2}$，即 $2x+\ln 2x=2$. 由 $\frac{e}{y}-\ln y=1$，令 $\frac{e}{y}=t$，则 $y=\frac{e}{t}$，所以 $t-\ln\frac{e}{t}=1$，即 $t+\ln t=2$. 设 $f(x)=x+\ln x$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $2x+\ln 2x=2$ 以及 $t+\ln t=2$，得 $2x=t$，又 $\frac{e}{y}=t$，所以 $xy=\frac{e}{2}$.

17. 解：(1) 因为 $\sqrt{3}a\sin B=b(2+\cos A)$，由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin B(2+\cos A)$，…………………… 2 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=2$.

所以 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=2$. …………………… 4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………………… 5 分

(2) 由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$，得 $cb\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$，即 $bc=3$. …………………… 6 分

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc+bc=12$，

可得 $b+c=\sqrt{12+3}=\sqrt{15}$. …………………… 8 分

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，

所以 $AD=\dfrac{bc\sin\frac{2\pi}{3}}{(b+c)\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………………… 12 分

18. 解：(1) 由题意知，$(0.004+0.012+m+0.028+0.042)\times10=1$，…………………… 2 分

解得 $m=0.014$. …………………… 3 分

$\overline{x}=0.04\times55+0.12\times65+0.14\times75+0.28\times85+0.42\times95=84.2$(分).

估计这 100 名学生的成绩的平均数是 84.2 分. …………………… 5 分

(2) 由题知 [70,80) 组有 $100\times0.14=14$ 人，[80,90) 组有 $100\times0.28=28$ 人，[90,100] 组有 $100\times0.42=42$ 人. …… 6 分

利用分层抽样抽取 6 名学生，则在 [70,80)，[80,90)，[90,100] 组中抽取的人数分别为：

$\frac{6}{84}\times14=1$ 人，$\frac{6}{84}\times28=2$ 人，$\frac{6}{84}\times42=3$ 人，

即在 [70,80)，[80,90)，[90,100] 组中抽取的人数分别为 1 人，2 人，3 人. ……………………

记[70,80)组的1位同学为A,[80,90)组的2位同学为B_1、B_2,[90,100]组的3位同学为C_1、C_2、C_3,则从6位同学中抽2位同学有(A,B_1),(A,B_2),(A,C_1),(A,C_2),(A,C_3),(B_1,B_2),(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_1,C_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_2,C_3),(C_1,C_2),(C_1,C_3),(C_2,C_3),共15种可能. …… 9分

其中[80,90)组中至少有1人入选的有(A,B_1),(A,B_2),(B_1,B_2),(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_1,C_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_2,C_3),共9种, …… 11分

所以这2人中至少有1人来自[80,90)组的概率为$P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. …… 12分

19. (1)证明:∵平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC,平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$,又$BC\perp AC$,$BC\subset$平面ABC,

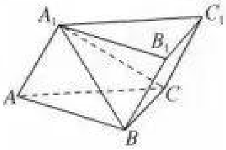
∴$BC\perp$平面A_1ACC_1. …… 2分

又$AA_1\subset$平面A_1ACC_1,∴$BC\perp AA_1$. …… 3分

∵$AA_1\perp A_1B$,又$BC\cap A_1B=B$,BC,$A_1B\subset$平面BCA_1,∴$AA_1\perp$平面A_1BC. …… 5分

又$A_1C\subset$平面A_1BC,∴$AA_1\perp A_1C$. …… 6分

(2)解:设点C到平面A_1ABB_1的距离为h,则由$V_{C-AA_1B}=V_{A-A_1BC}$得:



$\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot AA_1$. …… 8分

由(1)可知$BC\perp$平面A_1ACC_1,又$A_1C\subset$平面A_1ACC_1,∴$BC\perp A_1C$.

又$AC=4$,$AA_1=2$,$AC^2=AA_1^2+CA_1^2$,$CA_1=2\sqrt{3}$,

∴$S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1C=3\sqrt{3}$. …… 9分

在$\triangle ABC$中,$AC=4$,$BC=3$,又$BC\perp AC$,∴$AB=5$.

在$\triangle A_1AB$中,$AA_1=2$,$AB=5$,$AA_1\perp A_1B$,∴$A_1B=\sqrt{21}$.

∴$S_{\triangle AA_1B}=\frac{1}{2}AA_1\cdot A_1B=\sqrt{21}$. …… 10分

∴[illegible]$\sqrt{7}$,即点C到平面A_1ABB_1的距离为$\frac{6\sqrt{7}}{7}$. …… 12分

20. 解:(1)由题意知[illegible]$-(x-2)(x-1)e^{-x}$. …… 1分

∵$e^{-x}>0$,∴$f'(x)<0$,解得[illegible];[illegible]解得$1<x<2$. …… 3分

∴$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,1)$,[illegible],单调递增区间为[illegible] …… 4分

(2)∵$f(x)\geqslant -x^2+2x+m$对任意的$x\in[0,+\infty)$恒成立,

∴$m\leqslant f(x)+x^2-2x=(x^2-x+1)\cdot e^{-x}+x^2-2x$. …… 6分

令$g(x)=(x^2-x+1)\cdot e^{-x}+x^2-2x$,则$g'(x)=-(x-2)(x-1)e^{-x}+2(x-$[illegible]

令$u(x)=2-x+2e^x$,则$u'(x)=2e^x-1$,易得$u'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

∴$u'(x)\geqslant u'(0)=1>0$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立,∴$u(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$u(x)\geqslant u(0)=4>0$在$[0,+\infty)$上恒成立. …… 8分

∴当$x\in[0,1)$时,$g'(x)=\frac{(x-1)(2-x+2e^x)}{e^x}<0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)=\frac{(x-1)(2-x+2e^x)}{e^x}>0$,

∴$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增, …… 10分

∴$g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{e}-1$, …… 11分

∴$m\leqslant\frac{1}{e}-1$,即实数m的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{e}-1\right]$. …… 12分

21. 解:(1)由题意知l与y轴不垂直,所以可设l的方程为$x=my+\frac{p}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y^2=2px,\\ x=my+\frac{p}{2},\end{cases}$得$y^2-2pmy-p^2=0$,则$y_1y_2=-p^2$,$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^2}{4}$. …… 2分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-p^2+\frac{p^2}{4}=-3$. …… 4分

又$p>0$,解得$p=2$,所以C的方程是$y^2=4x$. …… 5分

(2)由(1)知$F(1,0)$,设l的方程为$x=my+1(m\neq 0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+1,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$,则$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$.

所以$x_1+x_2=my_1+1+my_2+1=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$, …… 6分

所以AB的中点为$D(2m^2+1,2m)$,$|AB|=x_1+x_2+2=4m^2+4$. …… 7分

又 l' 的斜率为 $-m$，所以 l' 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2m^2+3$，…………………… 8分

将上式代入 $y^2=4x$，并整理得 $y^2+\frac{4}{m}y-4(2m^2+3)=0$.

设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，则 $y_3+y_4=-\frac{4}{m}$，$y_3y_4=-4(2m^2+3)$.

则 $x_3+x_4=-\frac{1}{m}\left(-\frac{4}{m}\right)+4m^2+6=\frac{4}{m^2}+4m^2+6$，所以 MN 的中点为 $E\left(\frac{2}{m^2}+2m^2+3,-\frac{2}{m}\right)$，

$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=\frac{4(m^2+1)\sqrt{2m^2+1}}{m^2}$. …………………… 9分

由于 MN 垂直平分 AB，又 $\angle AMB+\angle ANB=180°$，即 A,M,B,N 四点在同一圆上，即 $|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，从而 $\frac{1}{4}|AB|^2+|DE|^2=\frac{1}{4}|MN|^2$.

即 $4(m^2+1)^2+\left(2+\frac{2}{m^2}\right)^2+\left(\frac{2}{m}+2m\right)^2=\frac{4(m^2+1)^2(2m^2+1)}{m^4}$，…………………… 11分

解得 $m=1$ 或 $m=-1$，

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. …………………… 12分

22. 解：(1)由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{3}-\frac{1}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，消去参数 t，得 $\sqrt{3}x+y=4$，即直线 l 的普通方程是 $\sqrt{3}x+y-4=0$.

…………………… 2分

由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入，

得 $x^2+y^2=2y$，即曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+(y-1)^2=1$. …………………… 4分

(2)设点 P 的坐标为 $(\cos\alpha,1+\sin\alpha)$，

则 $d_1=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+1+\sin\alpha-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-3|}{2}=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)$，…………………… 6分

又 $d_2=1+\sin\alpha$，……………………

所以 $d_1+d_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{2}$，

所以当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时，d_1+d_2 取得最大值 $\frac{7}{2}$. ……………………

23. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|-|3x-1|$. …………………… 1分

当 $x<\frac{1}{3}$ 时，$f(x)=|x-1|-|3x-1|=2x<-7$，解得 $x<-\frac{7}{2}$，所以 $x<-\frac{7}{2}$；…………………… 2分

当 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=|x-1|-|3x-1|=-4x+2<-7$，解得 $x>\frac{9}{4}$，所以无解；…………………… 3分

当 $x>1$ 时，$f(x)=|x-1|-|3x-1|=-2x<-7$，解得 $x>\frac{7}{2}$，所以 $x>\frac{7}{2}$. …………………… 4分

综上所述，不等式 $f(x)<-7$ 的解集是 $\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$. …………………… 5分

(2)由题意知，只需满足 $g(x)_{min}\geqslant f(x)_{max}$ 即可. 因为 $g(x)=x^2+2$，

所以 $g(x)_{min}=2$. …………………… 6分

又 $a>\frac{1}{3}$，所以 $f(x)=\begin{cases}2x+a-1, & x<\frac{1}{3},\\ -4x+a+1, & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant a,\\ -2x-a+1, & x>a.\end{cases}$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=a-\frac{1}{3}$. …………………… 8分

由 $g(x)_{min}\geqslant f(x)_{max}$，得 $2\geqslant a-\frac{1}{3}$，…………………… 9分

即 $a\leqslant\frac{7}{3}$，所以 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{7}{3}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$. …………………… 10分

关于我们