高三数学

考生注意：

1．本试卷分选择题和非选择题两部分．满分 150 分，考试时间 120 分钟．

2．答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚．

3．考生作答时，请将答案答在答题卡上．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效．来源：高三答案公众号

4．本卷命题范围：集合与常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、立体几何．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $P=\{正奇数\}$，$M=\{x|x=a\oplus b,a\in P,b\in P\}$，若 $M\subseteq P$，则 M 中的运算“$\oplus$”是（　　）

A．加法　　B．除法　　C．乘法　　D．减法

2．在复平面内，复数 z 对应的点 $(\sqrt{5},b)$ 在第四象限，若 $|z|=3$，则 $z=$（　　）

A．$3-\sqrt{5}i$　　B．$\sqrt{5}-3i$　　C．$\sqrt{5}+2i$　　D．$\sqrt{5}-2i$

3．已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_4=3,S_6-S_2=12$，则 $S_8=$（　　）

A．$\frac{127}{5}$　　B．51　　C．$\frac{128}{5}$　　D．$\frac{256}{5}$

4．设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则函数 $y=f(x-3)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于（　　）

A．直线 $y=1$ 对称　　B．直线 $x=2$ 对称　　C．直线 $x=2$ 对称　　D．直线 $y=2$ 对称

5．已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 $f(x)$ 取最大值时，x 的一个值为（　　）

A．$-\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

6．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，“对任意正整数 n，均有 $a_n<0$”是“$\{S_n\}$ 为递减数列”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知点 M 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，若 $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$，则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle BCM$ 的面积之比为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．2　　C．$\frac{8}{3}$　　D．$\frac{4}{3}$

8．已知某四面体的三组对棱的长分别相等，依次为 3，4，x，则 x 的取值

A. $(\sqrt{5},\sqrt{7})$　　B. $(4,7)$　　C. $(\sqrt{5},3)$　　D. $(\sqrt{7},5)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．若函数 $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)(x\in\mathbf{R})$，则（　　）

A．$f(x)$是奇函数　　B．$f(x)$是偶函数　　C．$f(x)$没有最小值　　D．$f(x)$没有最大值

10．给定平面α，设 A，B 是α外任意两点，则（　　）

A．在α内存在直线与直线 AB 异面　　B．在α内存在直线与直线 AB 相交

C．在α内存在直线与直线 AB 平行　　D．存在过直线 AB 的平面与α垂直

11．已知$\sin\alpha>\sin\beta$，则下列命题正确的是（　　）

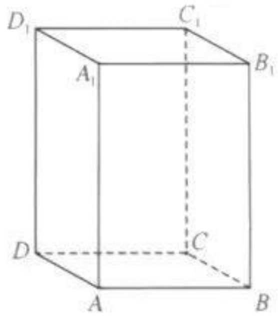
A．若角α,β是第一象限角，则$\cos\alpha>\cos\beta$

B．若角α,β是第二象限角，则$\tan\beta>\tan\alpha$

C．若角α,β是第三象限角，则$\cos\beta>\cos\alpha$

D．若角α,β是第四象限角，则$\tan\alpha>\tan\beta$

12．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=\frac{1}{2}AA_1=2$，点 P 为空间一点，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+(1-x-y)\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，则下列判断正确的是（　　）



A．线段 AP 长度的最小值为号$\frac{4}{3}$

B．当$\mu=\frac{1}{2}$时，三棱锥$Q-BDA_1$的体积为定值

C．无论x,y,λ,μ取何值，点 P 与点 Q 不可能重合

D．当$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$时，四棱锥$Q-ABCD$的外接球的表面积为9π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=3,|\vec{a}-\vec{b}|=5,\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则$|\vec{b}|=$____________．

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2,x\le 0,\\-x^2+2x-2a,x>0,\end{cases}$ 若对任意 $x\in[-3,+\infty),f(x)\le|x|$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____________．

15. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 已知$a=2,\sin^2 A+3\sin^2 B=2a\sin^2 C$，则$\cos C$的最小值为__________.

16. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_7>0,S_8<0$，则$\frac{a_6}{a_5}$的取值范围是__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分10分）

在公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中，a_1,a_3,a_9成公比为a_3的等比数列，又数列$\{b_n\}$满足

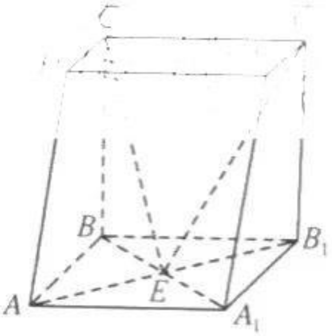
$$b_n=\begin{cases}2^{a},n=2k-1,\\2n,n=2k\end{cases}\left(k\in\mathbf{N}^*\right).$$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分12分）

如图，在直棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB\parallel CD,AB=BB_1=BC=2CD,BC\perp BA_1,AB_1$与$A_1B$交于点$E$.



（1）求证：$AD\parallel$平面CEC_1；

（2）求直线AB_1与平面CEC_1所成角的正弦值.

19.（本小题满分12分）

设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，A为钝角，且$\tan B=\frac{b}{a}$.

（1）探究A与B的关系，并证明你的结论；

（2）求$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

20.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2},3a_{n+1}^2=2a_n^2+1,b_n=1-a_n^2$.

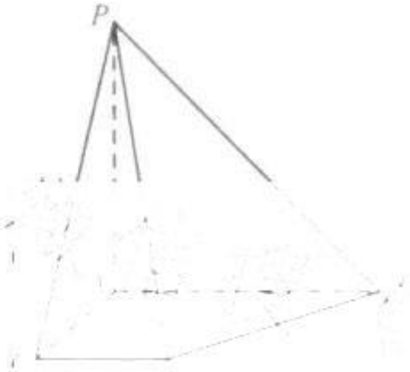
（1）证明：数列$\{b_n\}$是等比数列，并求通项公式；

（2）证明：数列$\{b_n\}$中的任意三项$b_i,b_j,b_k(i<j<k)$都不成等差数列；

（3）若关于正整数n的不等式$nb_n>m$的解集中有且仅有三个元素，求实数m的取值范围.

21.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$PA=AD=2$，$AB=BC=1$.



（Ⅰ）求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值；

（2）定义两条异面直线之间的距离是指其中一条直线上任意一点到另一条直线距离的最小值，利用此定义求异面直线 PB 与 CD 之间的距离.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)\sin x(a\in\mathbf{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$，讨论关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 内的根个数，并加以证明.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1．C　若 $a=3,b=1$，则 $a+b=4\notin P,a-b=2\notin P,\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}\notin P$，因此排除 ABD，故选 C.

2．D　由题意，得 $z=\sqrt{5}+b\mathrm{i}(b<0)$，则 $|z|^2=(\sqrt{5})^2+b^2=3^2$，解得 $b=-2$（2 舍去），所以 $z=\sqrt{5}-2\mathrm{i}$．故选 D．微信搜：高三答案公众号

3．B　$\because S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=3,S_6-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6=12,q>0$，$\therefore$
$a_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=3$，$a_1q^2\left(1+q+q^2+q^3\right)=12$，解得 $a_1=\dfrac{1}{5},q=2$，则

$$S_8=\frac{\frac{1}{5}\left(1-2^8\right)}{1-2}=51$$

．故选 B.

4．C　设函数 $y=f(x-3)$ 的图象上任意一点 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $y_0=f\left(x_0-3\right),P\left(x_0,y_0\right)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点为 $Q\left(4-x_0,y_0\right)$．又函数 $y=f(1-x)$ 中，当 $x=4-x_0$ 时，
$y=f\left[1-\left(4-x_0\right)\right]=f\left(x_0-3\right)$，所以 $Q\left(4-x_0,y_0\right)$ 在 $y=f(1-x)$ 的图象上．故函数 $y=f(x-3)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称．故选 C.

5．C

$$f(x)=\sin^2x+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2x+\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2=\frac{5}{4}\sin^2x+\frac{3}{4}\cos^2x+$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x=\frac{3}{4}+\frac{1-\cos 2x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x=1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=1+\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

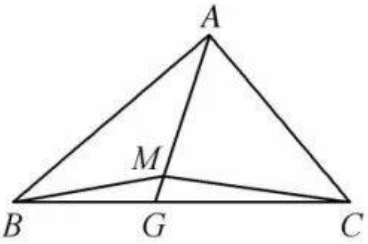
．当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$ 时，等号成立，取 $k=0$，得 x 的一个值为 $\dfrac{\pi}{3}$．故选 C.

6．A　当 $a_n<0$ 时，则 $S_n-S_{n-1}=a_n<0\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\therefore S_n<S_{n-1}$，则“对任意正整数 n，均有 $a_n<0$”是“$\{S_n\}$ 为递减数列”的充分条件；如数列 $\{a_n\}$ 为 $0,-1,-2,-3,-4,\cdots$，显然数列 $\{S_n\}$ 是递减数列，但是 a_n 不一定小于零，还有可能大于或等于零，所以“对任意正整数 n，均有 $a_n<0$”不是“$\{S_n\}$ 为递减数列”的必要条件，因此“对任意正整数 n，均有 $a_n<0$”是“$\{S_n\}$ 为递减数列”的充分不必要条件．故选 A.

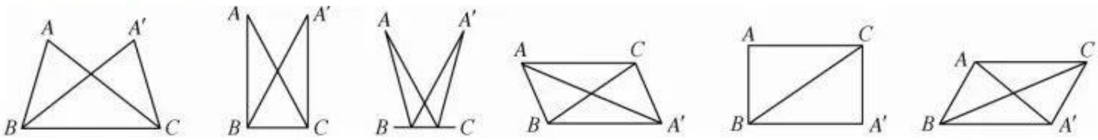
7．B　如图，延长 AM 交 BC 于 G，则 $\overline{AG}=\lambda\overline{AB}+(1-\lambda)\overline{AC}$，因为 A，M，G 三点共线，所以 $\overline{AG}=t\overline{AM}$，即 $\lambda\overline{AB}+(1-\lambda)\overline{AC}=t\left(\dfrac{1}{2}\overline{AB}+\dfrac{1}{3}\overline{AC}\right)$，所以 $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$，则

$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{3}{2}$，故 $\lambda=\dfrac{3}{5}$ 且 $t=\dfrac{6}{5}$，又 $\overline{CG}=\lambda\overline{CB}$，故 $\overline{CG}=\dfrac{3}{5}\overline{CB}$，所以 $\dfrac{BG}{GC}=\dfrac{2}{3},\dfrac{GM}{GA}=\dfrac{1}{6}$，

所以$S_{\triangle BMC}=\frac{5}{2}S_{\triangle BGM}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}S_{\triangle BAM}=\frac{1}{2}S_{\triangle BAM}$．所以$\frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle BMC}}=2$．故选 B.



8．D　如图所示，



设$AB=3,AC=4$，四面体$A'-ABC$可以由$\triangle ABC$和在同一平面的$\triangle A'BC$沿着BC为轴旋转构成，前三个图讨论最短：

当$\angle ABC<90°$向$90°$趋近时，BC逐渐减少，$AA'<BC$，可以构成$x=AA'=BC$的四面体；

当$\angle ABC\geq 90°$时，构成的四面体$AA'>BC$，不满足题意；

所以满足题意的四面体第三对棱长大于$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，后三个图讨论最长；

当$\angle BAC<90°$向$90°$趋近时，BC逐渐增大，$AA'>BC$，可以构成$x=AA'=BC$的四面体；

当$\angle ABC\geq 90°$时，构成的四面体$AA'\angle BC$，不满足题意；

所以满足题意的四面体第三对棱长小于$\sqrt{4^2+3^2}=5$，综上，$x\in(\sqrt{7},5)$，故选 D.

9. BD　易知$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(-x)=\ln(x^2+1)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故 B 正确，A 错误；因为$x^2+1\geq 1$，所以$f(x)=\ln(x^2+1)\geq\ln 1=0$，所以$f(x)$没有最大值，有最小值 0，故 C 错误，D 正确．故选 BD.

10．AD　因为A，B是α外的任意两点，所以直线AB与平面α相交或平行.

若AB与平面α相交，设交点为O，则α内不过交点O的直线与AB异面，但平面α内不存在与AB平行的直线；

若AB与平面α平行，则在α内存在直线b与AB平行，而在α内与b相交的直线与AB异面，但α内不存在直线与AB相交，由上知 A 正确，B、C 均错误；

无论AB与平面α平行还是相交，过A作平面α的垂线，则这条垂线与直线AB所在平面与平面α垂直（如果垂线与AB重合，则过AB的任意平面都与α垂直），D 正确．故选 AD.

11．BCD　设角α,β的终边分别为射线OP，OQ.

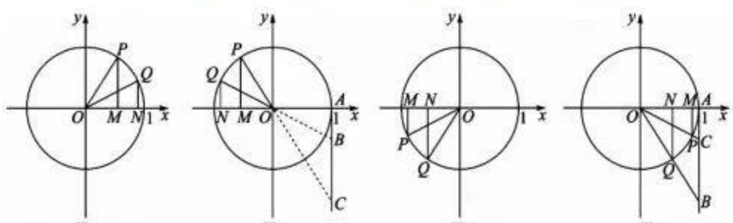


图1　图2　图3　图4

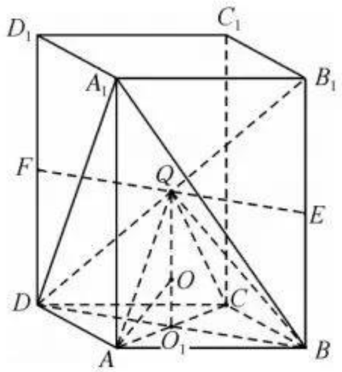
对于 A，如图 1，$\sin\alpha = MP > NQ = \sin\beta$，此时 $\cos\alpha = OM, \cos\beta = ON, OM < ON$，所以 $\cos\alpha < \cos\beta$，故 A 错误；

对于 B，如图 2，$\sin\alpha = MP > NQ = \sin\beta$，此时 $\tan\alpha = AC, \tan\beta = AB$，且 $AC < AB$，所以 $\tan\alpha < \tan\beta$，故 B 正确；

对于 C，如图 3，$\sin\alpha = MP > NQ = \sin\beta$，此时 $\cos\alpha = OM, \cos\beta = ON$，且 $OM < ON$，所以 $\cos\beta > \cos\alpha$，故 C 正确；

对于 D，如图 4，$\sin\alpha = MP > NQ = \sin\beta, AB < AC$，即 $\tan\beta < \tan\alpha$，故 D 正确．故选 BCD．

12．ABD　由 $A\ \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + (1-x-y)\overrightarrow{AA_1}$ 得点 P 在平面 BDA_1 内，故 AP 的最小值为点 A 到平面 BDA_1 的距离，利用等积法易求 $(AP)_{\min} = \dfrac{4}{3}$，故 A 正确；当 $\mu = \dfrac{1}{2}$ 时，点 Q 的轨迹为图中直线 EF，显然 $EF \mathbin{/\!/} BD$，易得 $EF \mathbin{/\!/}$ 平面 BDA_1，故三棱锥 $Q-BDA_1$ 的体积为定值，故 B 正确；由 $\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BD} + \mu\overrightarrow{BB_1}$，则点 Q 在平面 BDD_1B_1 内，又点 P 在平面 BDA_1 内，且平面 $BDA_1 \cap$ 平面 $BDD_1B_1 = BD$，故 P, Q 可能重合，故 C 错误；当 $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$ 时，点 Q 为 DB_1 的中点，连接 AC，其与 BD 的交点为 O_1，连接 QO_1，则 $QO_1 = 2$，设四棱锥 $Q-ABCD$ 的外接球的球心为 O，则 O 在 QO_1 上，设球 O 的半径为 R，则 $R^2 = \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 + (R-2)^2$，解得 $R = \dfrac{3}{2}$，故球 O 的表面积为 $4\pi \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$，故 D 正确．故选 ABD．



13．$3\sqrt{2}$　由 $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ 得 $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 25$，即 $\vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 25$，结合 $|\vec{a}| = 3, \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$，得 $3^2 - 2\times 1 + |\vec{b}|^2 = 25$，所以 $|\vec{b}|^2 = 18$，即 $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$．

14．$\left[\dfrac{1}{8}, 2\right]$　由题意，当 $x > 0$ 时，$f(x) = -x^2 + 2x - 2a$，只需 $-x^2 + 2x - 2a \le x$ 恒成立，即 $2a \ge -x^2 + x$ 恒成立，因为 $x > 0$ 时，$y = -x^2 + x$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$，所以 $a \ge \dfrac{1}{8}$；当 $-3 \le x \le 0$ 时，$f(x) = x^2 + 2x + a - 2$，只需 $x^2 + 2x + a - 2 \le -x$ 恒成立，即 $a \le -x^2 - 3x + 2$ 恒成立，因为 $-3 \le x \le 0$ 时，$y = -x^2 - 3x + 2$ 的最小值

$a \le 2$．故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{8},2\right]$．

15．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　$a=2$，则原等式为 $\sin^2 A+3\sin^2 B=4\sin^2 C$，由正弦定理得 $a^2+3b^2=4c^2$，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{4}\left(a^2+3b^2\right)}{2ab}=\frac{3a^2+b^2}{8ab}\ge\frac{\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $b^2=3a^2$ 时取等号，所以 $\cos C$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$．

16．$(2,3)$　由题意可得 $\begin{cases} a_1>0,d<0, \\ S_7=7a_1+\frac{7\times 6d}{2}>0, \\ S_8=8a_1+\frac{8\times 7d}{2}<0. \end{cases}$ 所以 $-\frac{7}{2}<\frac{a_1}{d}<-3$，令 $t=\frac{a_1}{d}\in\left(-\frac{7}{2},-3\right)$，

$\frac{a_6}{a_5}=\frac{a_1+5d}{a_1+4d}=\frac{t+5}{t+4}$．令 $f(t)=\frac{t+5}{t+4}\left(-\frac{7}{2}<t<-3\right)$，则

$f'(t)=\frac{t+4-(t+5)}{(t+4)^2}=\frac{-1}{(t+4)^2}<0$ 在 $\left(-\frac{7}{2},-3\right)$ 上恒成立，故函数 $f(t)$ 在 $\left(-\frac{7}{2},-3\right)$ 上单调递减，$f\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{-\frac{7}{2}+5}{-\frac{7}{2}+4}=3, f(-3)=\frac{-3+5}{-3+4}=2$，即 $\frac{a_6}{a_5}$ 的取值范围是 $(2,3)$．

17．解：（1）公差 d 不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_1,a_3,a_9 成公比为 a_3 的等比数列，

所以 $a_3^2=a_1a_9, a_3=a_1a_3$，

所以 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d), a_1=1$，解得 $a_1=d=1$，

所以 $a_n=n, n\in\mathbf{N}^*$．

（2）由（1）可得 $b_n=\begin{cases} 2^n, n=2k-1, \\ 2n, n=2k \end{cases} \left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，

当 n 为偶数时，$T_n=\left(2+8+32+\cdots+2^{n-1}\right)+(4+8+12+\cdots+2n)$

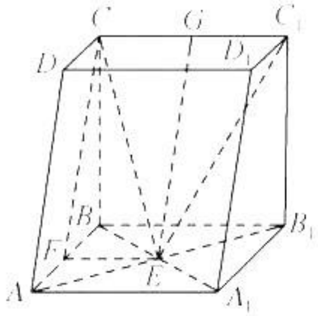
$=\frac{2\left(1-4^{\frac{n}{2}}\right)}{1-4}+\frac{\frac{n}{2}(4+2n)}{2}=\frac{2\left(2^n-1\right)}{3}+\frac{n(n+2)}{2}$；

当 n 为奇数时，

$T_n=T_{n-1}+b_n=\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{3}+\frac{(n-1)(n+1)}{2}+2^n=\frac{2^{n+2}}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7}{6}$．

所以 $T_n=\begin{cases}\dfrac{2(2^n-1)}{3}+\dfrac{n(n+2)}{2}, n为偶数,\\ \dfrac{2^{n+2}}{3}+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{7}{6}, n为奇数.\end{cases}$

18.（1）证明：分别取线段 AB,CC_1 的中点 F，G，连结 CF,EF,EG，如图所示.



因为点 F 是线段 AB 的中点，$AB=2CD,AB\parallel CD$，以 $AF\parallel CD,AF=CD$，所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel CF$.

在 $\triangle ABB_1$ 中，点 F 是线段 AB 的中点，点 E 是线段 AB_1 的中点，所以

$EF\parallel BB_1,EF=\frac{1}{2}BB_1$.

因为点 G 是线段 CC_1 的中点，所以 $CC_1\parallel BB_1,CG=\frac{1}{2}BB_1$，所以 $EF\parallel CG,EF=CG$，

所以四边形 $EFCG$ 是平行四边形，所以 $CF\parallel GE$，又 $AD\parallel CF$，所以 $AD\parallel GE$.

又 $AD\not\subset$ 平面 $CEC_1,GE\subset$ 平面 CEC_1，所以 $AD\parallel$ 平面 CEC_1.

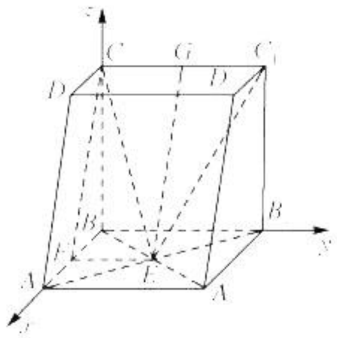
（2）解：在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB,BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BB_1\perp AB,BB_1\perp BC$.

又 $BC\perp BA_1,BB_1\cap BA_1=B,BB_1,BA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $BA\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp BA$.

不妨设 $AB=2$，以 B 为坐标原点，BA,BB_1,BC 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $B(0,0,0),A_1(2,2,0),C(0,0,2),C_1(0,2,2),A(2,0,0),B_1(0,2,0)$，所以

$E(1,1,0),\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,0),\overrightarrow{CE}=(1,1,-2),\overrightarrow{C_1E}=(1,-1,-2)$.

设平面 CEC_1 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1E}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y-2z=0,\\ x-y-2z=0,\end{cases}$ 令 $x=4$，

解得 $y=0,z=2$，所以平面 CEC_1 的一个法向量 $\vec{n}=(4,0,2)$.

设直线 AB_1 与平面 CEC_1 成角的大小为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AB_1}|}=\dfrac{|-8|}{\sqrt{4+4}\times\sqrt{16+4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

即直线 AB_1 与平面 CEC_1 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

19. 解：(1) A 与 B 之间的关系是 $A=B+\dfrac{\pi}{2}$，证明如下：

因为 $\tan B=\dfrac{b}{a}$，由正弦定理，得 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

所以 $\sin A=\cos B$，即 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos B$，

又因为 $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$，所以 $A-\dfrac{\pi}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

于是 $A-\dfrac{\pi}{2}=B$，所以 $A=B+\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 由 (1) 知，$A=B+\dfrac{\pi}{2}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}-2B>0$，所以 $0<B<\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\cos A+\cos B+\cos C=-\sin B+\cos B+\sin 2B$.

令 $t=\cos B-\sin B$，则 $t=\sqrt{2}\cos\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)\in(0,1)$ 且 $\sin 2B=1-t^2$，

所以 $\cos A+\cos B+\cos C=-t^2+t+1=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$.

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$-t^2+t+1$ 取得最大值，最大值为 $\dfrac{5}{4}$，

当 $t=1$ 或 0 时，$-t^2+t+1$ 的值为 1，

所以 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围是 $\left(1,\dfrac{5}{4}\right]$.

20. (1) 证明：由 $3a_{n+1}^2=2a_n^2+1$，得 $3\left(1-a_{n+1}^2\right)=2\left(1-a_n^2\right)$，即 $b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n$.

又 $a_1=\dfrac{1}{2},b_1=1-a_1^2=\dfrac{3}{4}$.

则有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2}{3}$，所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $\dfrac{3}{4}$，公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列，

所以 $b_n=\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

（2）证明：假设存在$b_i,b_j,b_k(i<j<k)$成等差数列，

则$2b_j=b_i+b_k$，即$2\times\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$，

整理得$2\times2^{j-i}=3^{j-i}+2^{k-i}\times3^{j-k}$，

易知上式左侧为偶数，右侧3^{j-i}为奇数，$2^{k-i}\times3^{j-k}$不可能为奇数，则上式左侧与右侧不可能相等，

故数列$\{b_n\}$中的任意三项$b_i,b_j,b_k(i<j<k)$都不成等差数列.

（3）解：关于正整数n的不等式$nb_n>m$，即$\frac{3n}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}>m$，

当$n=1$时，$m<\frac{3}{4}$；

当$n=2$时，$m<1$；

当$n=3$时，$m<1$；

当$n=4$时，$m<\frac{8}{9}$，

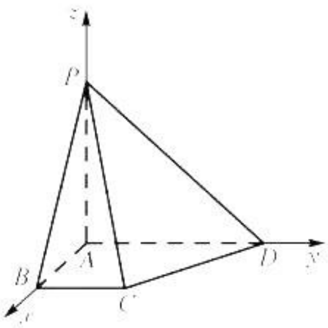
并且当$n\geq3$时，$\frac{(n+1)b_{n+1}}{nb_n}=\frac{2(n+1)}{3n}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{8}{9}<1$.

所以当$n\geq3$时，数列$\{nb_n\}$单调递减，要使关于正整数n的不等式$nb_n>m$的解集中有且仅有三个元素，

则$\frac{3}{4}\leq m<\frac{8}{9}$，故实数$m$的取值范围为$\left[\frac{3}{4},\frac{8}{9}\right)$.

21．解：以A为原点，分别以棱AB,AD,AP所在直线为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，

则各点的坐标为$B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,2,0),P(0,0,2)$.



（1）因为$PA\perp$平面$ABCD$，且$AD\subset$面$ABCD$，

所以$PA\perp AD$ D，又$AB\perp AD$，且$PA\cap AB=A$，

所以$AD\perp$平面PAB，

所以$\overrightarrow{AD}$是平面PAB的一个法向量，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$.

因为$\overrightarrow{PC}=(1,1,-2),\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$.

设平面PCD的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0$.

即 $\begin{cases}x+y-2z=0,\\2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，解得 $z=1,x=1$，

所以 $\overrightarrow{m}=(1,1,1)$ 是平面 PCD 的一个法向量.

从而 $\cos\left\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以平面 PAB 与平面 PCD 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）易知 $\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$，

设 Q 为直线 PB 上一点，且 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BP}=(-\lambda,0,2\lambda)$，

又 $\overrightarrow{CD}=(-1,1,0),\overrightarrow{CB}=(0,-1,0)$，则 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=(-\lambda,-1,2\lambda)$，

所以点 Q 到直线 CD 的距离

$$d=\sqrt{\overrightarrow{CQ}^2-(|\overrightarrow{CQ}|\cos\langle\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CD}\rangle)^2}=\sqrt{\overrightarrow{CQ}^2-\left(\frac{\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\lambda^2+1+4\lambda^2-\left(\frac{\lambda-1}{\sqrt{1+1}}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2}}.$$

因为 $\dfrac{9}{2}\lambda^2+\lambda+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}\left(\lambda+\dfrac{1}{9}\right)^2+\dfrac{4}{9}\geq\dfrac{4}{9}$，

所以 $d\geq\dfrac{2}{3}$.

所以异面直线 PB 与 CD 之间的距离为 $\dfrac{2}{3}$.

22．解：（1）因为 $f(x)=a\ln(x+1)\sin x$，所以 $f'(x)=a\left[\dfrac{\sin x}{x+1}+\ln(x+1)\cos x\right]$，

$f'(0)=0,f(0)=0,$，

所以 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-0=0$，即 $y=0$.

（2）当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，有 $\dfrac{\sin x}{x+1}+\ln(x+1)\cos x>0$.

当 $a=0$ 时，$f(x)=0$，不符合题意；

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，即 $f(x)_{\max}=f(0)=0$，不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

即 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)=\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$，解得 $a=1$.

令$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，由（1）知$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增.

因为$g(0)=-\frac{1}{2}<0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\frac{1}{2}>0$，所以$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内存在唯一的零点.

当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$g'(x)=\frac{\sin x}{x+1}+\ln(x+1)\cos x$，

令$h(x)=g'(x)$，则$h'(x)=\frac{2(x+1)\cos x-\left[1+(x+1)^2\ln(x+1)\right]\sin x}{(x+1)^2}$，

所以当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，有$h'(x)<0$，即$g'(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减，

因为$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}>0,g'(\pi)=-\ln(\pi+1)<0$，

所以$g'(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$内存在唯一零点$x_0$，即$g'(x_0)=0$，

所以当$x\in\left[\frac{\pi}{2},x_0\right]$时，$g'(x)>g'(x_0)=0$，即$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},x_0\right)$上单调递增，

所以有$g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，即$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},x_0\right)$内无零点，

当$x\in[x_0,\pi]$时，$g'(x)<g'(x_0)=0$，所以$g(x)$在$[x_0,\pi]$上单调递减.

因为$g(x_0)>0,g(\pi)<0$，所以$g(x)$在$[x_0,\pi]$内有且仅有一个零点.

综上，关于x的方程$f(x)=\frac{1}{2}$在$[0,\pi]$内有两个不相等的实数根.

关于我们

全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。