绝密★启用前

2023年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

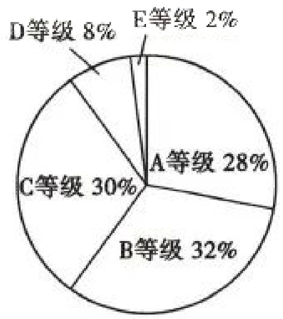
1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x\leqslant 3\}$，$B=\{-2,-1,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{-2,1,2\}$　　C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{-1,1\}$

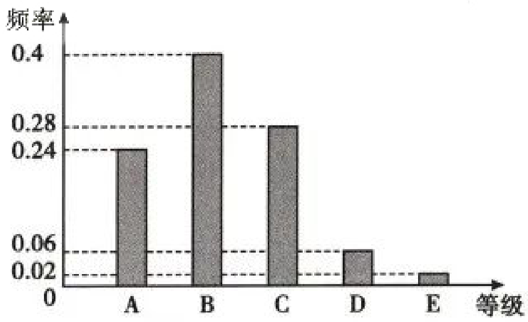
2. 已知 i 为虚数单位，若 $|z+i|=|z-i|=2$，则 $|z|=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

3. 某省普通高中学业水平考试分为合格性考试（合格考）和选择性考试（选择考）. 其中"选择考"成绩根据学生考试时的原始卷面分数，由高到低进行排序，评定为A，B，C，D，E五个等级. 某高中2022年参加"选择考"总人数是2020年参加"选择考"总人数的2倍，为了更好地分析该校学生"选择考"的水平，统计了该校2020年和2022年"选择考"成绩等级结果，得到如下统计图. 针对该校"选择考"情况，2022年与2020年比较，下列说法正确的是



2020年该校"选择考"等级统计图



2022年该校"选择考"等级统计图

A. 获得A等级的人数减少了　　B. 获得B等级的人数增加了1.5倍

C. 获得D等级的人数减少了一半　　D. 获得E等级的人数相同

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

5. 要得到函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\cos 2x$ 的图象

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　　　D. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}3^{x+1}-1, x\geqslant 1,\\ -\log_3(x+5)-2, x<1,\end{cases}$且$f(m)=-2$，则$f(m+6)=$

A. -16　　B. 16　　C. 26　　D. 27

7. 过圆$x^2+y^2=4$上的动点作圆$x^2+y^2=1$的两条切线，则连接两切点线段的长为

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知曲线$y=axe^x+\ln x$在点$(1,ae)$处的切线方程为$y=3x+b$，则

A. $a=e, b=-2$　　B. $a=e, b=2$　　C. $a=e^{-1}, b=2$　　D. $a=e^{-1}, b=-2$

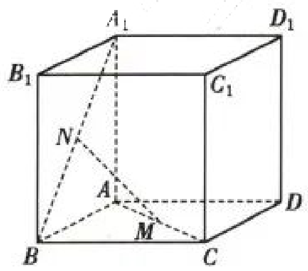
9. 某中学坚持“五育”并举，全面推进素质教育. 为了更好地增强学生们的身体素质，校长带领同学们一起做俯卧撑锻炼. 锻炼是否达到中等强度运动，简单测量方法为$f(t)=ke^t$，其中t为运动后心率(单位：次/分)与正常时心率的比值，k为每个个体的体质健康系数. 若$f(t)$介于$[28,34]$之间，则达到了中等强度运动；若低于28，则运动不足；若高于34，则运动过量. 已知某同学正常时心率为80，体质健康系数$k=7$，经过俯卧撑后心率y(单位：次/分)满足$y=80\left(\ln\sqrt{\frac{x}{12}}+1\right)$，$x$为俯卧撑个数. 已知俯卧撑每组12个，若该同学要达到中等强度运动，则较合适的俯卧撑组数为(e为自然对数的底数，$e\approx 2.718$)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

10. 已知点F是抛物线$C: x^2=4y$的焦点，过F的直线l交抛物线C于不同的两点M, N，设$\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{FN}$，点$Q$为$MN$的中点，则$Q$到$x$轴的距离为

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{4}$

11. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M, N分别为AC, A_1B的中点，则下列说法中不正确的是



A. MN//平面ADD_1A_1

B. $MN\perp AB$

C. 直线MN与平面$ABCD$所成的角为60°

D. 异面直线MN与DD_1所成的角为45°

12. 实数x, y, z分别满足$x^{2022}=e$，$2022^y=2023$，$2022z=2023$，则x, y, z的大小关系为

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $z>x>y$　　D. $y>x>z$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若样本数据$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$的标准差为10，则数据$3x_1-1, 3x_2-1, \cdots, 3x_{10}-1$的方差为______.

14. 设命题p：$\forall x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$，$x+\frac{1}{x}>a$. 若$\neg p$是假命题，则实数$a$的取值范围是______.

15. 在$\triangle ABC$中，角A, B, C的对边分别是a, b, c，已知$A=60°$，$b+c=6$，且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$内切圆的半径为______.

16. 2006 年 5 月 20 日，蹴鞠作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家级非物质文化遗产名录."蹴"有用脚蹴、踢的含义，"鞠"最早是外包皮革、内饰米糠的球，因而"蹴鞠"就是指古人以脚蹴、踢皮球的活动. 如图所示，若将"鞠"的表面视为光滑的球面，已知某"鞠"的表面上有四个点 P,A,B,C，满足 $PC=2$，$PC\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，若 $\triangle ABC$ 的面积为 2，则制作该"鞠"的外包皮革面积的最小值为________. 来源：高三答案公众号

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（12 分）

现在常常可以看到人们在走路、吃饭或乘车时低着头玩手机，长期下来，就很容易使颈椎损伤，患上颈椎病. 某学习小组调查研究"长期使用智能手机对颈椎病的影响"，随机选取了 100 名手机用户得到部分统计数据如下表，约定日使用手机时间超过 4 小时为"频繁使用手机". 已知"频繁使用手机"的人数比"非频繁使用手机"的人数少 24 人.

	非频繁使用手机	频繁使用手机	合计
颈椎病人数	8	p	
非颈椎病人数	q	16	
合计			100

(1)求表中 p,q 的值，并补全表中所缺数据；

(2)根据 2×2 列联表，判断是否有 99.9% 的把握认为"频繁使用手机"对颈椎病有影响.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

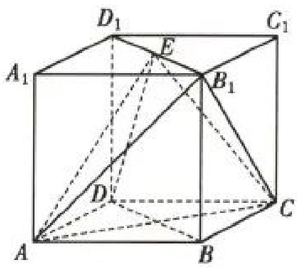
$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18.（12 分）

如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 2 的正方体，E 是 B_1D_1 的中点.

(1)证明：$CE\perp BD$；

(2)求三棱锥 $A-B_1CE$ 的体积.



19.（12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_5=30$，$a_4=8$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n；

(2)若________________，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

在①$b_n=2^{a_n}a_n$；②$b_n=\dfrac{a_n^2+a_{n+1}^2}{S_n}$；③$b_n=(-1)^n a_n$ 这三个条件中任选一个补充在第(2)问中，并对其求解.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20.（12 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x$.

（1）当 $a>0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=-1$ 时，判断函数 $g(x)=f(x)+(x^2-2x+1)e^x$ 的零点个数，并说明理由.

21.（12 分）

设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点恰好是抛物线 $y^2=4\sqrt{3}x$ 的焦点，椭圆 E 的离心率和双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的离心率互为倒数.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）设椭圆 E 的左、右顶点分别为 A,B，过定点 $N(-1,0)$ 的直线与椭圆 E 交于 C,D 两点（与点 A,B 不重合）. 证明：直线 AC,BD 的交点的横坐标为定值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分

22.［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$（其中 φ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）射线 $l:\theta=\alpha$ 与曲线 C_1,C_2 分别交于点 A,B（均异于极点），当 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$ 时，求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的最小值.

23.［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

已知正实数 a,b,c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

（1）求 $a+4b+9c$ 的最小值；

（2）证明：$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant 2\sqrt{abc}$.

2023 年河南省普通高中毕业班高考适应性测试

文科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	B	A	A	C	D	D	B	B	C	B

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 900　14. $(-\infty,2)$　15. $\sqrt{3}-1$　16. 12π

三、解答题:共 70 分。

(一)必考题:共 60 分。

17. 解:(1)因为"频繁使用手机"的人数比"非频繁使用手机"的人数少 24 人,而"频繁使用手机"的人数与"非频繁使用手机"的人数之和为 100,所以"频繁使用手机"的人数为 38,"非频繁使用手机"的人数为 62,所以 $p=22,q=54$. ………………………… 4 分

补全表中所缺数据如下:

	非频繁使用手机	频繁使用手机	合计
颈椎病人数	8	22	30
非颈椎病人数	54	16	70
合计	62	38	100

………………………… 6 分

(2)根据题意计算观测值为

$K^2=\dfrac{100\times(8\times16-54\times22)^2}{30\times70\times62\times38}\approx22.710>10.828$, ………………………… 10 分

所以有 99.9%的把握认为"频繁使用手机"对颈椎病有影响. ………………………… 12 分

18. 解:(1)证明:

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AC\perp BD$. ………………………… 2 分

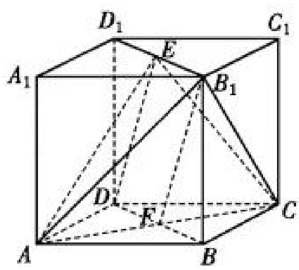
在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\perp$平面 $ABCD$,又 $BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $AA_1\perp BD$. ……………… 4 分

又 $AA_1\cap AC=A$,$AA_1\subset$平面 AA_1C_1C,$AC\subset$平面 AA_1C_1C,

所以 $BD\perp$平面 AA_1C_1C. ………………………… 5 分

又 $CE\subset$平面 AA_1C_1C,

所以 $CE\perp BD$. ………………………… 6 分



(2)设 AC 与 BD 交于点 F,连接 B_1F.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$BD//B_1D_1$ 且 $BD=B_1D_1$.

又 E,F 分别是 B_1D_1,BD 的中点,$\therefore$ $DF//B_1E$,$DF=B_1E$,

$\therefore$ 四边形 B_1EDF 是平行四边形. ………………………… 8 分

$\therefore$ $DE//B_1F$.

又$\because$ $DE\not\subset$平面 AB_1C,$B_1F\subset$平面 AB_1C,

$\therefore$ $DE//$平面 AB_1C. ………………………… 9 分

又正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,

$V_{A-B_1CE}=V_{E-AB_1C}=V_{D-AB_1C}=V_{B_1-ACD}=\frac{1}{3}\times BB_1\times S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{4}{3}$. ………………………… 12 分

19. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,首项为 a_1,则 $5a_1+\frac{5\times(5-1)}{2}d=30$,

$a_1+3d=8$,解得 $a_1=2,d=2$. ………………………………………………………… 3 分

所以 $a_n=2n,S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2+n$. ………………………………………………… 6 分

(2)选①:由(1)知,$b_n=2^{a_n}a_n=2n\cdot4^n$,

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2\times4^1+4\times4^2+\cdots+2n\cdot4^n$,

$4T_n=2\times4^2+4\times4^3+\cdots+2(n-1)\times4^n+2n\cdot4^{n+1}$.

两式相减得:来源:高三答案公众号

$-3T_n=2\times4^1+2\times4^2+\cdots+2\times4^n-2n\cdot4^{n+1}$

$=2\times\frac{4(1-4^n)}{1-4}-2n\times4^{n+1}$ ………………………………………………………… 9 分

$=-\frac{8}{3}(1-4^n)-2n\cdot4^{n+1}$, ………………………………………………………… 10 分

所以 $T_n=\frac{8}{9}(1-4^n)+\frac{2n}{3}\cdot4^{n+1}=\frac{(6n-2)\cdot4^{n+1}+8}{9}$. ……………………………………… 12 分

选②:由(1)$b_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{S_n}=\frac{8n^2+8n+4}{n(n+1)}=8+\frac{4}{n(n+1)}=8+4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, ……………………… 9 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=8n+4\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=8n+\frac{4n}{n+1}=\frac{8n^2+12n}{n+1}$. ……………… 12 分

选③:由(1)$b_n=(-1)^n\cdot2n$,则 $T_n=-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n\cdot2n$,

当 n 为偶数时,$T_n=2\times\frac{n}{2}=n$, ………………………………………………………… 9 分

当 n 为奇数时,$T_n=2\times\frac{n-1}{2}-2n=-n-1$,

所以 $T_n=\begin{cases}-n-1,n\text{ 为奇数},\\ n,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由题意可知,函数的定义域为$\{x|x>0\}$,

$f'(x)=ax-(a+1)+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$, ……………………………………… 2 分

①若 $0<a<1$,当 $x\in(0,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$(0,1)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减; ……………………… 3 分

②若 $a=1$,$f'(x)\geqslant0$ 恒成立,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增; ……………………………… 4 分

③若 $a>1$,当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{a},1\right)$上单调递减. ………………………………… 5 分

综上所述,当$0<a<1$时,$f(x)$在$(0,1)$和$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减;

当$a=1$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当$a>1$时,$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{a},1\right)$上单调递减. ……………………………… 6 分

(2)$g(x)$在$(0,+\infty)$上有且只有一个零点. 理由如下:

由题意得,$g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+(x^2-2x+1)e^x, x\in(0,+\infty)$,

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-x+(x^2-1)e^x=(x-1)(x+1)\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)$, ……………………………………………………………… 7 分

设$h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$,$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$,$\therefore$ $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\because$ $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$h(1)=e-1>0$,$\therefore$ 存在唯一$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得$h(x_0)=0$,

即$e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$,所以$-x_0=\ln x_0$, ……………………………………………………………………… 8 分

当$0<x<x_0$时,$h(x)<0$,即$g'(x)>0$;当$x_0<x<1$时,$h(x)>0$,即$g'(x)<0$;

当$x>1$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$.

$\therefore$ $g(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore$ 当$x=x_0$时,$g(x)$取得极大值,

且极大值为$g(x_0)=\ln x_0-\dfrac{1}{2}x_0^2+(x_0^2-2x_0+1)e^{x_0}=-\dfrac{1}{2}x_0^2+\dfrac{1}{x_0}-2$. …………………………… 10 分

设$F(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}-2\left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)$,易得$F(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上单调递减,

$\therefore$ $F(x)<F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}<0$,$\therefore$ $g(x)$在$(0,1)$上无零点.

$\because$ $g(1)=-\dfrac{1}{2}<0$,$g(2)=e^2-2+\ln 2>0$,$\therefore$ $g(x)$在$(1,+\infty)$上有且只有一个零点.

综上所述,$g(x)$在$(0,+\infty)$上有且只有一个零点. ……………………………………………… 12 分

21. 解:(1)因为抛物线$y^2=4\sqrt{3}x$的焦点为$(\sqrt{3},0)$,所以$c=\sqrt{3}$. …………………………………… 2 分

又因为双曲线的离心率是$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,所以椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 从而$a=2,b=1$, …………………………… 4 分

所以椭圆E的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得$A(-2,0)$,$B(2,0)$.

设过点$N(-1,0)$的直线为$x=my-1$,设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得$(4+m^2)y^2-2my-3=0$.

则 $\Delta=4m^2+12(4+m^2)>0$，∴ $y_1+y_2=\dfrac{2m}{4+m^2}, y_1y_2=-\dfrac{3}{4+m^2}$. ………………………………………… 7 分

设直线 AC 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BD 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立两条直线方程，解得 $x=2\cdot\dfrac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}$， ………………………………………… 9 分

将 $x_1=my_1-1, x_2=my_2-1$ 代入上式，得 $x=2\cdot\dfrac{2my_1y_2+(y_1+y_2)-4y_1}{(y_1+y_2)+2y_1}$， ………………………………… 10 分

将 $y_1+y_2=\dfrac{2m}{4+m^2}, y_1y_2=-\dfrac{3}{4+m^2}$ 代入，得 $x=2\times\dfrac{-4\left(\dfrac{m}{4+m^2}+y_1\right)}{2\left(\dfrac{m}{4+m^2}+y_1\right)}=-4$.

所以直线 AC,BD 的交点的横坐标为定值-4. ………………………………………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分.

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$ 及 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ 可得

曲线 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$， ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$ 得 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$. 又 $\rho\cos\theta=x, \rho\sin\theta=y$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………… 5 分

(2) 由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2\end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{4}{1+\sin^2\theta}$，

将 $\theta=\alpha$ 代入，得 $|OA|=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

又因为 $|OB|=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$， ………………………………………………… 7 分

所以 $\dfrac{|OB|}{|OA|}=\dfrac{2\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}=2\sqrt{\dfrac{1}{\sin^4\alpha}-1}$. ……………………… 8 分

因为 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin\alpha\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

所以当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 有最小值，最小值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. ………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 因为 a,b,c 均为正实数，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，

所以 $(a+4b+9c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant\left(\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}+\sqrt{4b\cdot\dfrac{1}{b}}+\sqrt{9c\cdot\dfrac{1}{c}}\right)^2=36$. ……………………… 3 分

当且仅当 $\dfrac{a}{\frac{1}{a}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{b}}=\dfrac{9c}{\frac{1}{c}}$，即 $a=6,b=3,c=2$ 时，等号成立.

所以 $a+4b+9c\geqslant 36$,

故 $a+4b+9c$ 的最小值为 36. …………………………………………………… 5 分

(2)因为 a,b,c 均为正实数,由基本不等式可知,

$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$, $a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$, $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, …………………………………………………… 7 分

所以 $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\dfrac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=\dfrac{2\sqrt{abc}}{a}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{b}+\dfrac{2\sqrt{abc}}{c}$

$=2\sqrt{abc}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=2\sqrt{abc}$. …………………………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=3$ 时,等号成立.

故 $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant 2\sqrt{abc}$. …………………………………………………… 10 分