

名校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷 理科数学 参考答案

1. A 【解析】因为 $A = \{x | y = \sqrt{\ln x}\} = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x > 2\}$.

2. A 【解析】 $z = 1 + \frac{2i}{3-i} = 1 + \frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$.

3. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $a_1 + a_2 = 2a_3$, 两边同时除以 a_1 得 $1 + q = 2q^2$, 即 $(q-1)(2q+1) = 0$, 因为 $q \neq 1$, 所以 $q = -\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{a_7}{a_5} = q^2 = \frac{1}{4}$.

4. A 【解析】由 y 与 x 正相关得 $\hat{b} > 0$, 由题意得 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 4.47$, 由 (\bar{x}, \bar{y}) 在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上得 $3\hat{b} + \hat{a} = 4.47$.

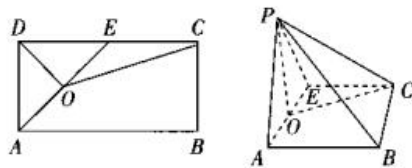
5. B 【解析】由点 $F(\frac{3}{2}, 0)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点, 得抛物线 C 的方程为 $y^2 = 6x$, 与 $x - my - n = 0$ 联立得 $y^2 - 6my - 6n = 0$. 设 $A(\frac{y_1^2}{6}, y_1), B(\frac{y_2^2}{6}, y_2)$, 则 $y_1 y_2 = -6n$, 因为 $OA \perp OB$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{36} + y_1 y_2 = n^2 - 6n = 0$, 显然 $n \neq 0$, 所以 $n = 6$.

6. D 【解析】取 BC 中点 F , 则 $\overrightarrow{AE} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \mu \overrightarrow{AD} = 2\lambda \overrightarrow{AF} + \mu \overrightarrow{AD}$, 由 D, E, F 共线得 $2\lambda + \mu = 1$, 所以 $\lambda\mu = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda(1-2\lambda) \leq \frac{1}{2} (\frac{2\lambda+1-2\lambda}{2})^2 = \frac{1}{8}$, 当且仅当 $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$ 时等号成立, 所以 $\lambda\mu$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$.

7. C 【解析】 $(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})(x-1)^6$ 展开式中的常数项为 $2C_6^0(-1)^6 - C_6^1(-1)^5 + C_6^2(-1)^4 = 2 - 6 + 15 = 23$.

8. D 【解析】图中 8 个国家中第二季度 GDP 同比增长率不小于 -15% 的有 4 个, 所以所求概率 $P = \frac{C_4^2 C_4^2 + C_4^3 C_1^1 + C_4^4}{C_8^4} = \frac{53}{70}$.

9. D 【解析】如右图, 因为 $AB \parallel CE$, 异面直线 AB 与 PC 所成角就是 $\angle PCE$ 或其补角, 在 $\triangle PCE$ 中, $EC = 2, PE = 2$, 在左图中作 $DO \perp AE$, 垂足为 O , 则 $DO = \sqrt{2}, OC = \sqrt{10}$, 所以 $PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{2+10} = 2\sqrt{3}$, 所以 $\cos \angle PCE = \frac{PC^2 + EC^2 - DE^2}{2PC \cdot EC} = \frac{12+2^2-2^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



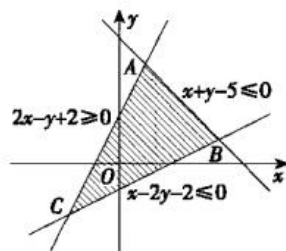
10. A 【解析】存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, 首先应满足 $a > 0$, 此时 $x \geq 0$ 时 $f(x) = x^2 - ax + 1 = (x - \frac{a}{2})^2 - 1 + \frac{a^2}{4} \geq 1 - \frac{a^2}{4}$, $x < 0$ 时 $f(x) = \frac{a}{2^x} > a$, 所以 $\begin{cases} a > 0 \\ 1 - \frac{a^2}{4} \leq a \end{cases}$, 解得 $a \geq 2\sqrt{2} - 2$.

11. B 【解析】直线 l 与双曲线 C 的右支有公共点, 则直线 l 的斜率 $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$, 直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 2a^2$ 相切, 则 $k^2 = \frac{2a^2}{c^2 - 2a^2}$, 所以 $0 < \frac{2a^2}{c^2 - 2a^2} < \frac{b^2}{a^2}$, 化简得 $e^2 > 3$, 从而 $e > \sqrt{3}$.

12. B 【解析】由 $f(x) = 2|\sin x| \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$ 得 $f(-\frac{\pi}{12}) = 2, f(\frac{\pi}{4}) = 1, f(-\frac{\pi}{12}) \neq f(\frac{\pi}{4}), f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, ① 错误; 由 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(x+2\pi) = f(x)$ 可得, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域就是 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的值域; 当 $x \in [0, \pi]$ 时 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 由 $\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}$, 可得 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$, ② 正确; 当 $x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 时 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 且 $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 由正弦函数单调性知 ③ 正确; $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 是增函数, 在 $[-\frac{\pi}{12}, 0]$ 是减函数, 0 是极小值点, ④ 错误.

13. $3x - 2y + 4 = 0$ 【解析】因为 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x + 1$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \cos x, f(0) = 2, f'(0) = \frac{3}{2}$, 所以曲线 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = \frac{3}{2}x + 2$, 即 $3x - 2y + 4 = 0$.

14. $[-11, 4]$ 【解析】不等式组表示的平面区域如图所示, 由 $z = x - 3y$, 得 $y = \frac{1}{3}x - \frac{z}{3}$, 则直线 $y = \frac{1}{3}x - \frac{z}{3}$ 经过点 $A(1, 4)$ 时, z 取到最小值, $z_{\min} = 1 - 3 \times 4 = -11$, 直线 $y = \frac{1}{3}x - \frac{z}{3}$ 经过点 $C(-2, -2)$ 时, z 取到最大值, $z_{\max} = -2 - 3 \times (-2) = 4$, 所以 $z = x - 3y$ 的取值范围为 $[-11, 4]$.



15. 4 【解析】由 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 可得 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$, 所以 $\frac{3a_{11} + a_{13} + a_{14} + a_{15}}{S_9} = \frac{a_{10} + a_{11} + \dots + a_{15}}{S_9} = \frac{S_{15} - S_9}{S_9} = \frac{S_{15}}{S_9} - 1 = \frac{15a_8}{9a_5} - 1 = \frac{15}{9} \times 3 - 1 = 4$.

16. $\frac{5}{4}\pi$ 【解析】设四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球半径为 R , 球心为 O , 直线 OM 与平面 $ABCD$ 交于点 N , 则 $(OM - MN)^2 + AN^2 = OA^2$, 即 $(R-1)^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2, R = \frac{3}{2}$, 又球心 O 到平面 ABB_1A_1 的距离 $d = 1$, 设四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球被平面 ABB_1A_1 截得的圆的半径为 r , 则 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以四棱锥 $M-ABCD$ 的外接球被平面 ABB_1A_1 截得的截面面积 $S = \pi r^2 = \frac{5}{4}\pi$.

17. 【解析】(1) 由 $\frac{\sqrt{3} \sin B}{\tan C} + \sqrt{3} \cos B = \frac{2a \sin A}{c}$ 及正弦定理得 $\sqrt{3} \sin B \cos C + \sqrt{3} \cos B \sin C = 2 \sin^2 A$, 2 分
即 $\sqrt{3} \sin(B+C) = 2 \sin^2 A$, 即 $\sqrt{3} \sin A = 2 \sin^2 A$, 4 分
因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}, \sin A \neq 0$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为点 D 在 BC 上, 且 $BD = 2DC$, 所以 $\vec{AD} - \vec{AB} = 2(\vec{AC} - \vec{AD})$,

即 $\vec{AB} + 2\vec{AC} = 3\vec{AD}$, 两边平方得 $\vec{AB}^2 + 4\vec{AC}^2 + 4\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cos \frac{\pi}{3} = 9\vec{AD}^2$,

即 $c^2 + 4b^2 + 2bc = 36$, 8 分

因为 $c^2 + 4b^2 + 2bc \geq 4bc + 2bc = 6bc$, 所以 $bc \leq 6$, 当且仅当 $\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = 2\sqrt{3} \end{cases}$ 时等号成立. 10 分

所以 $\triangle ABC$ 面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 12分

18.【解析】(1)证明:过点 P 作 AB 延长线的垂线,垂足为 D ,连接 CD ,

由题得 $\angle PBD = \angle CBD = \frac{\pi}{3}$,又 $PB = BC, BD = BD$,

故 $\triangle PBD \cong \triangle CBD$,故 $CD \perp AB$, 2分

由 $PD = PB \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, CD = BC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,又 $PC = \sqrt{6}$,

有 $PD^2 + CD^2 = PC^2$,故 $CD \perp PD$, 4分

又 $AB \cap PD = D$,故 $CD \perp$ 平面 PAB , 5分

又 $CD \subset$ 平面 ABC ,故平面 $PAB \perp$ 平面 ABC 6分

(2)如图所示,以直线 DC, DA, DP 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0), B(0,1,0), A(0,3,0), C(\sqrt{3},0,0), P(0,0,\sqrt{3})$, 7分

所以 $\vec{CP} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \vec{BP} = (0, -1, \sqrt{3}), \vec{AP} = (0, -3, \sqrt{3})$ 8分

设 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 PAC 的一个法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{CP} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AP} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -3y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}$$

取 $z_1 = \sqrt{3}$,得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ 9分

$$\text{设} \mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2) \text{是平面} PBC \text{的一个法向量,则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{CP} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \vec{BP} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \\ -y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}$$

取 $x_2 = 1$,得 $\mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 1)$, 10分

设平面 PAC 与平面 PBC 所成锐二面角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{|\sqrt{3} \times 1 + 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$$

所以平面 PAC 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{105}}{35}$ 12分

19.【解析】(1)列 2×2 列联表:

	男生	女生	合计
获得 2020 年度全民义务植树尽责证书	60	20	80
未获 2020 年度得全民义务植树尽责证书	10	10	20
合计	70	30	100

..... 2分

$$K^2 = \frac{100(60 \times 10 - 20 \times 10)^2}{70 \times 30 \times 80 \times 20} \approx 4.762 > 3.841. \text{ 4分}$$

所以有 95% 的把握认为该校男生更喜欢通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书. 5分

(2)设这 4 人中通过蚂蚁森林获得 2020 年度全民义务植树尽责证书的人数为 Y ,

则 Y 的取值依次为 $0, 1, 2, 3, 4$,且 $Y \sim B(4, \frac{4}{5})$.

$X = 2Y - 4$,所以 X 的取值依次为 $-4, -2, 0, 2, 4$ 6分

$$\text{且} P(X = -4) = P(Y = 0) = C_4^0 (\frac{1}{5})^4 = \frac{1}{625}$$

$$P(X=-2)=P(Y=1)=C_4^1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{16}{625},$$

$$P(X=0)=P(Y=2)=C_4^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=2)=P(Y=3)=C_4^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{256}{625},$$

$$P(X=4)=P(Y=4)=C_4^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

所以 X 的分布列为

X	-4	-2	0	2	4
P	$\frac{1}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$

\dots\dots\dots 10 分

$$E(X) = (-4) \times \frac{1}{625} + (-2) \times \frac{16}{625} + 0 \times \frac{96}{625} + 2 \times \frac{256}{625} + 4 \times \frac{256}{625} = \frac{12}{5}, \text{即 } X \text{ 的数学期望为 } \frac{12}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$\text{期望求解另一方式: } E(Y) = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}, E(X) = E(2Y-4) = 2E(Y) - 4 = \frac{32}{5} - 4 = \frac{12}{5}, \text{即 } X \text{ 的数学期望为 } \frac{12}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

注:若概率不全对,则对一个给 1 分.

20. 【解得】(1) 由点 $A(0, -\frac{1}{3}), B(0, \frac{1}{3})$ 三等分椭圆 C 的短轴, 得 $b=1$, \dots\dots\dots 1 分

$$\text{设 } c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{由 } \sin \angle FAB = \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ 得 } \tan \angle FAB = 3, \text{即 } c = 3 \times \frac{1}{3} = 1, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{所以 } a^2 = b^2 + c^2 = 2, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{所以椭圆 C 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$(2) \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 直线 } l \text{ 方程为 } y = kx - \frac{1}{3}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - \frac{1}{3} \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 整理得 } (9 + 18k^2)x^2 - 12kx - 16 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{4k}{6k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{-16}{9 + 18k^2},$$

$$\Delta = 144k^2 + 64(9 + 18k^2) > 0. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } \overrightarrow{PM} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0), \overrightarrow{PN} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = x_1 x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 + y_1 y_2 - y_0(y_1 + y_2) + y_0^2 \\ &= x_1 x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 + k^2 x_1 x_2 - \frac{k}{3}(x_1 + x_2) - y_0[k(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}] + \frac{1}{9} + y_0^2 \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

$$= (1 + k^2)x_1 x_2 - (\frac{k}{3} + x_0 + ky_0)(x_1 + x_2) + x_0^2 + y_0^2 + \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{-16 - (20 + 12y_0)k^2 - 12x_0 k}{9 + 18k^2} + x_0^2 + y_0^2 + \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{9} = 0, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{首先应满足 } \begin{cases} x_0 = 0 \\ 20 + 12y_0 = 32 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases},$$

当 $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=1 \end{cases}$ 时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}=0$, 且 $(0,1)$ 在椭圆 C 上,

所以椭圆 C 上存在点 $P(0,1)$, 使得恒有 $PM \perp PN$ 12 分

21. 【解析】(1) 因为 $f(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2}) - 2ax(\ln x - 1)$,

所以 $f'(x) = 2x(\ln x - \frac{1}{2}) + x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2a(\ln x - 1) - 2ax \cdot \frac{1}{x} = 2(x-a)\ln x (x > 0)$, 2 分

① 当 $a \leq 0$ 时, $x \in (0,1)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数,

② 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in (a,1)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, $x \in (0,a)$ 或 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数,

③ 当 $a=1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

④ 当 $a > 1$ 时, $x \in (1,a)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数, $x \in (0,1)$ 或 $x \in (a, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.

..... 6 分
综上所述可得, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 在 $(a,1)$ 上是减函数, 在 $(0,a), (1, +\infty)$ 上是增函数, $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上是减函数, 在 $(0,1), (a, +\infty)$ 上是增函数. 7 分

(2) 由(1)知, $1 < a < 2$ 时 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上是减函数, 在 $(0,1)$ 或 $(a, +\infty)$ 上是增函数,

$$f(a) = a^2(\ln a - \frac{1}{2}) - 2a^2(\ln a - 1) = a^2(\frac{3}{2} - \ln a),$$

因为 $1 < a < 2, \frac{3}{2} - \ln a > 0, f(a) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上没有零点, 9 分

$$f(x) = x^2(\ln x - \frac{1}{2}) - 2ax(\ln x - 1) = x[(x-2a)\ln x + (2a - \frac{1}{2}x)],$$

当 $1 < a < 2$ 且 $0 < x < 1$ 时, $x-2a < 0, \ln x < 0, 2a - \frac{1}{2}x > 0$,

所以 $f(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上没有零点. 11 分

综上所述可得, $1 < a < 2$ 时 $f(x)$ 的零点个数为 0. 12 分

22. 【解析】(1) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2+1} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$,

消去参数 t 得曲线 C_1 的普通方程为 $2x - y - 1 = 0 (0 < x \leq 1)$ 3 分

$$\rho = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{3}), \text{ 即 } \rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta,$$

由 $\rho^2 = x^2 + y^2, \rho\cos\theta = x, \rho\sin\theta = y$, 得圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x + 2y$,

$$\text{即 } (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4. \text{ 5 分}$$

(2) 由曲线 C_1 方程为 $2x - y - 1 = 0 (0 < x \leq 1)$,

可知曲线 C_1 表示以 $A(0, -1), B(1, 1)$ 为端点的线段(不包含点 A), 6 分

因为 $(0 - \sqrt{3})^2 + (-1 - 1)^2 > 4, (1 - \sqrt{3})^2 + (1 - 1)^2 < 4$, 8 分

所以点 A 在圆 C_2 外部, 点 B 在圆 C_2 内部,

所以曲线 C_1 与圆 C_2 的公共点个数为 1. 10 分

23. 【解析】(1) 当 $x < 0$ 时 $f(x) > 2|x|$, 即 $\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x - 2 > -2x \end{cases}$, 解得 $x < -\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$; 1 分

当 $0 \leq x \leq 2$ 时 $f(x) > 2|x|$ 等价于 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 > 2x \end{cases}$, 解集为 \emptyset ; 2分

当 $x > 2$ 时 $f(x) > 2|x|$ 等价于 $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - x + 2 > 2x \end{cases}$, 解得 $x > 2$, 3分

所以不等式 $f(x) > 2|x|$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{2}) \cup (2, +\infty)$ 4分

(2) 当 $x \leq 2$ 时 $f(x) = x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时取等号, 5分

当 $x > 2$ 时 $f(x) = x^2 - x + 2 > 4 - 2 + 2 = 4$, 6分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{9}{4}$, 7分

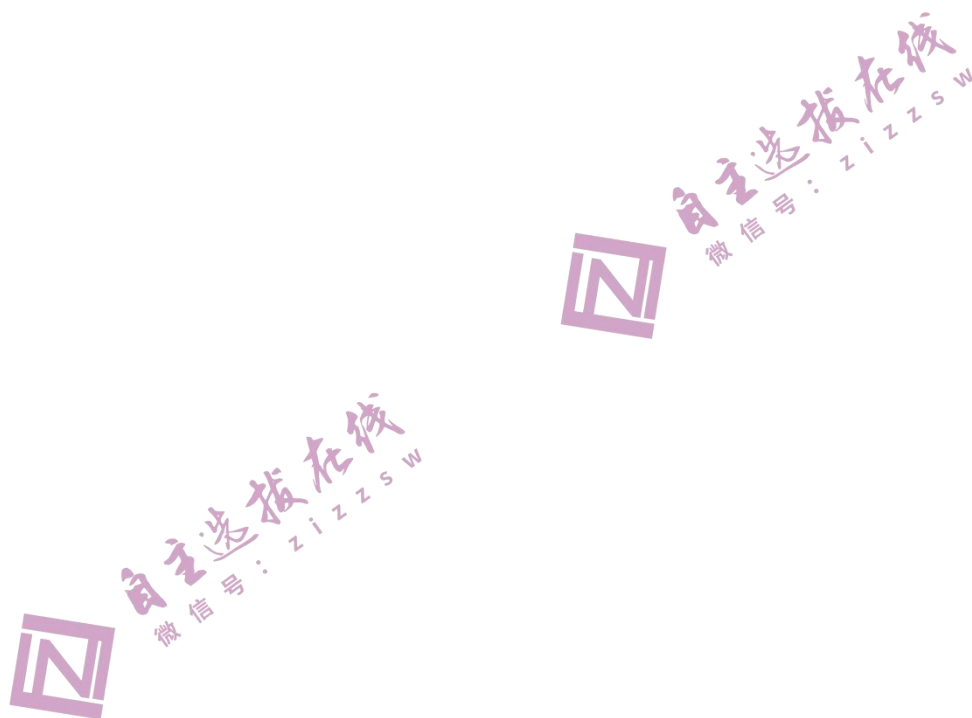
若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) \leq a + b$,

所以 $0 > a + b \geq -\frac{9}{4}$,

因为 $(-a) + (-b) \geq 2\sqrt{(-a)(-b)} = 2\sqrt{ab}$, 8分

所以 $2\sqrt{ab} \leq \frac{9}{4}$, $ab \leq \frac{81}{64}$, 当且仅当 $a = b = -\frac{9}{8}$ 时取等号.

所以 ab 的最大值为 $\frac{81}{64}$ 分



关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线