参考答案

1-5ADCDC　6-10CCCAD　11-12AA

4.【详解】因为三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为3，而$PC=6$，

所以PC为外接球的直径，如图，将三棱锥$P-ABC$放入如图所示的长方体，

则$AC=BC=4$，设长方体的另一棱长为a，

所以$2R=6=\sqrt{4^2+4^2+a^2}$，解得：$a=2$，即$PD=2$，

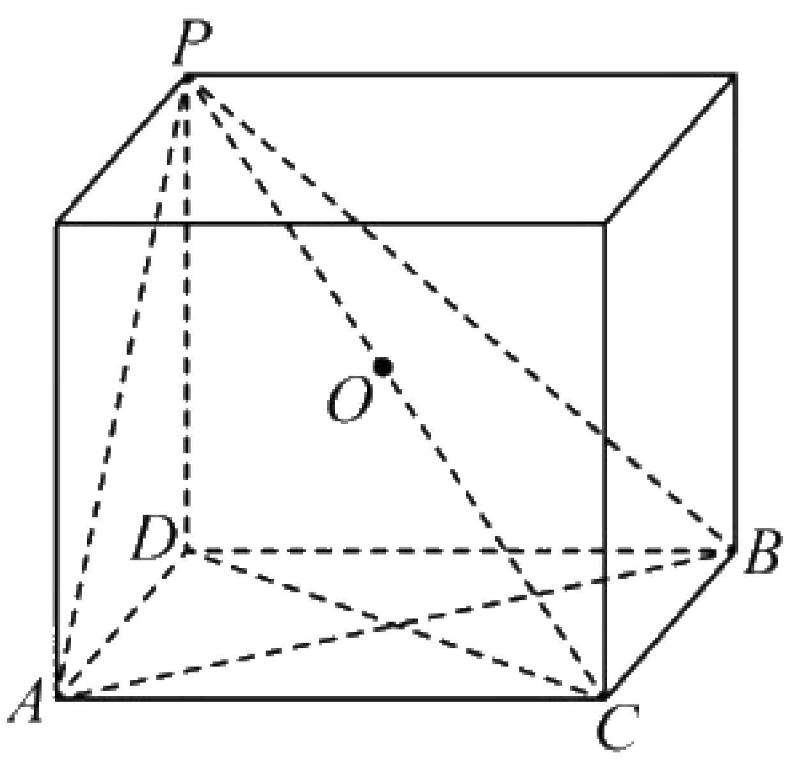
设外接球的球心为O，所以$PA=PB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

取$\triangle PAB$的外接圆的半径为r，

则$\cos\angle PAB=\dfrac{PA^2+AB^2-PB^2}{2\cdot PA\cdot AB}=\dfrac{32}{2\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

则$\sin\angle PAB=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以$2r=\dfrac{PB}{\sin\angle PAB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$，则$r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

所以该鞠（球）被平面 PAB 所截的截面圆面积$S=\pi r^2=\pi\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{25}{3}\pi$.



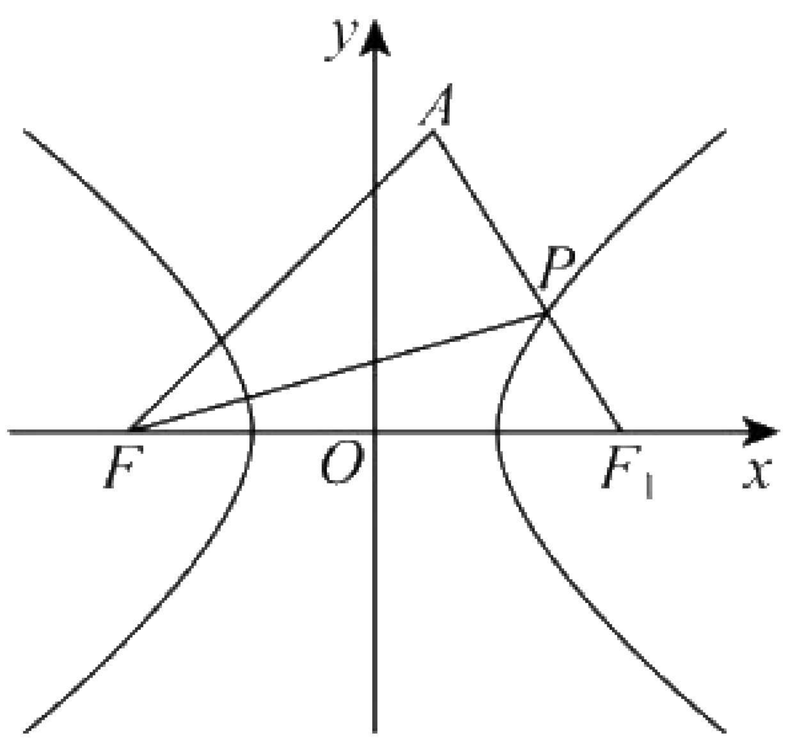
10.【详解】抛物线$y^2=16x$的准线为$x=-4$，

则点$A(m,n)$到准线的距离为$m+4=5$，所以$m=1$，

则$n=\pm 4$，故$A(1,\pm 4)$，设F_1是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点，$F_1(4,0)$

则$|PF|-|PF_1|=2a=4$，则$|PF|=|PF_1|+4$，故$|PF|+|PA|=|PA|+|PF_1|+4\geq|AF_1|+4=\sqrt{9+16}+4=9$，

当且仅当A,P,F_1三点共线时取等号，所以$|PF|+|PA|$的最小值为9.



11.【详解】函数$f\left(x\right)={\rm e}^{x}-{\rm e}^{-x}-2\sin x$的定义域为R，定义域关于原点对称，

$f\left(-x\right)={\rm e}^{-x}-{\rm e}^{x}-2\sin\left(-x\right)={\rm e}^{-x}-{\rm e}^{x}+2\sin x=-f\left(x\right)$，

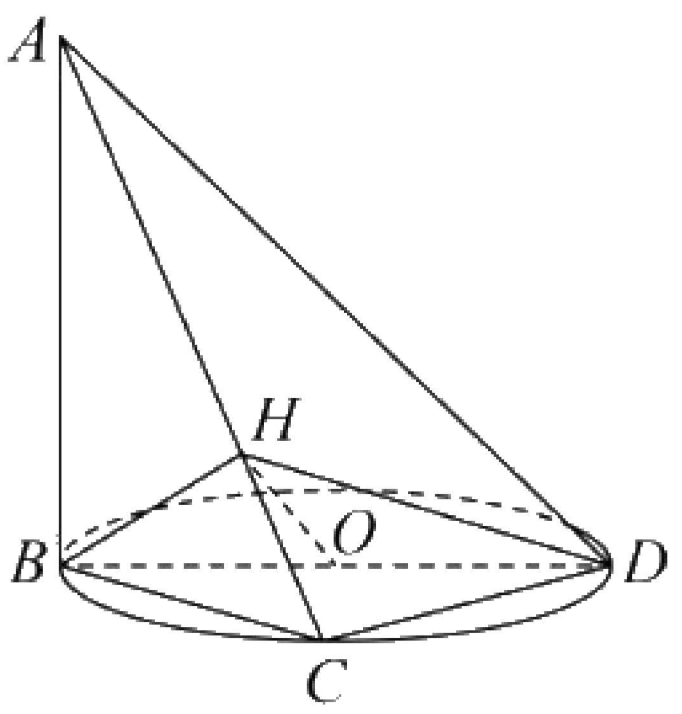
所以函数$f\left(x\right)={\rm e}^{x}-{\rm e}^{-x}-2\sin x$为奇函数，因为$f'\left(x\right)={\rm e}^{x}+{\rm e}^{-x}-2\cos x\geq 2\sqrt{{\rm e}^{x}\cdot{\rm e}^{-x}}-2\cos x\geq 0$，

当且仅当${\rm e}^{x}={\rm e}^{-x}$，即$x=0$时，等号成立，所以函数$f\left(x\right)={\rm e}^{x}-{\rm e}^{-x}-2\sin x$在R上单调递增，

所以$f(x^2-2x)+f(x-2)<0$可化为$f(x^2-2x)<-f(x-2)$，即$f(x^2-2x)<f(2-x)$，

所以$x^2-2x<2-x$，即$x^2-x-2<0$，解得$-1<x<2$，所以不等式$f(x^2-2x)+f(x-2)<0$的解集为$\left(-1,2\right)$.

12.【详解】设定圆圆心为O，半径为r，连接OH，设直径为BD，连接AD,CD，



$\because AB\perp$平面BCD，$CD\subset$平面BCD，$\therefore AB\perp CD$；

$\because BD$为直径，$\therefore BC\perp CD$，又$AB\cap BC=B$，$AB,BC\subset$平面ABC，

$\therefore CD\perp$平面ABC，又$BH\subset$平面ABC，$\therefore CD\perp BH$，

又$BH\perp AC$，$AC\cap CD=C$，$AC,CD\subset$平面ACD，

$\therefore BH\perp$平面ACD，$DH\subset$平面ACD，$\therefore BH\perp DH$，

在Rt△BDH中，$OH=OB=OD=r$，则点H的轨迹是以O为圆心，r为半径的圆.

13. $\frac{1}{4}$　　14. 0　　15. ②　　16. 2

16【详解】解：因为 $\log_2 3>1,\log_3 4>1$，所以 $\log_2 3+\log_3 4>2$，

又 $\frac{5}{3}=\log_2 2^{\frac{5}{3}}=\log_2 32^{\frac{1}{3}}$， $\log_2 3=\log_2 27^{\frac{1}{3}}$，则 $32^{\frac{1}{3}}>27^{\frac{1}{3}}$，

所以 $\log_2 27^{\frac{1}{3}}<\log_2 32^{\frac{1}{3}}$，即 $\log_2 3<\frac{5}{3}$，由 $\log_3 4=2\log_3 2$，

根据 $\frac{2}{3}=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\log_2 9^{\frac{1}{3}}$， $\log_3 2=\log_3 8^{\frac{1}{3}}$，则 $9^{\frac{1}{3}}>8^{\frac{1}{3}}$，

所以 $\log_3 8^{\frac{1}{3}}<\log_3 9^{\frac{1}{3}}$，即 $\log_3 2<\frac{2}{3}$，所以 $\log_3 4=2\log_3 2<\frac{4}{3}$，

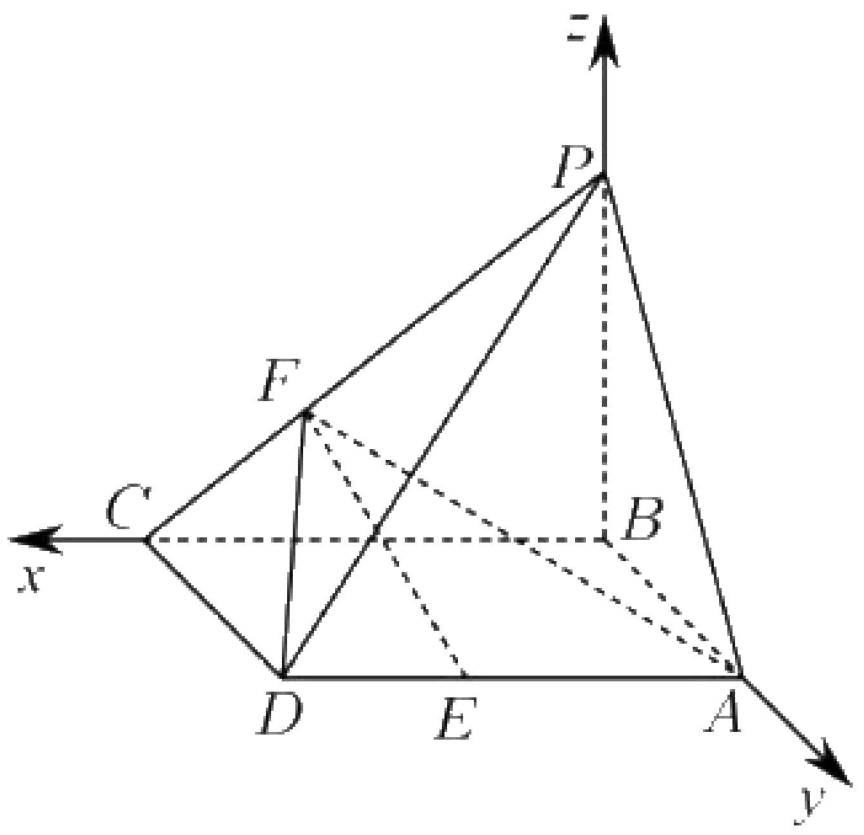
所以 $\log_2 3+\log_3 4<3$，所以 $2<\log_2 3+\log_3 4<3$，

因为 $k\in\mathbf{N}^*$，且 $k<\log_2 3+\log_3 4<k+1$，所以 $k=2$.

三、解答题

17.【详解】(1) 由题意知，BC，BA，BP 两两互相垂直，以 B 为原点，BC，BA，BP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$，则 $B(0,0,0)$，$C(3,0,0)$，$E(2,3,0)$，$F(2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-3,1)$．$\because PB\perp$ 底面 $ABCD$， $BC\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PB\perp BC$



又 $\because BC\perp BA$， $PB\cap BA=B$，且 $PB,BA\subset$ 平面 ABP，

$\therefore BC\perp$ 平面 ABP，所以 $\overrightarrow{BC}=(3,0,0)$ 是平面 ABP 的一个法向量.

因为 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF}=(3,0,0)\cdot(0,-3,1)=0$，所以 $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{EF}$．又 $EF\not\subset$ 平面 ABP，所以 EF P平面 ABP.

（2）因为 $A(0,3,0)$，$C(3,0,0)$，$D(3,3,0)$，$P(0,0,3)$，$F(2,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{AF}=(2,-3,1)$，$\overrightarrow{PC}=(3,0,-3)$，设平面 ADF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=3x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=2x-3y+z=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\ z=3y\end{cases}$，令$y=1$，得平面$ADF$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,3)$.

设直线PC与平面ADF所成的角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\dfrac{(3,0,-3)\cdot(0,1,3)}{3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

故：直线PC与平面ADF所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

18.【详解】(1) 余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证明如下：设$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，则$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，则$\vec{c}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$，

即$\left|\vec{c}\right|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos C+\left|\vec{b}\right|^2$，则$c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$，即$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(2) $c\sin A=2a\sin B$得$ca=2ab$，即$c=2b$，因为$b=2$，所以$c=4$，

因为$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{15}$，所以$\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sin A=\sqrt{15}$，

则$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，又$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\cos A=\dfrac{1}{4}$. 所以$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=4$，

故$\triangle ABC$的周长为10.

19.【详解】(1) 解：由题可知，所有可能的情况有：

①甲答对1次，乙答对2次的概率$P_1=C_2^1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^1\times\dfrac{1}{4}\times C_2^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{6}$；

②甲答对2次，乙答对1次的概率$P_2=C_2^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$；

③甲答对2次，乙答对2次的概率$P_3=C_2^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times C_2^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. 故所求的概率$P=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}$.

(2) 他们在一轮竞赛中获“优秀小组”的概率

$P'=C_2^1\cdot p_1\cdot(1-p_1)\cdot C_2^2\cdot p_2^2+C_2^2\cdot p_1^2\cdot C_2^1\cdot p_2\cdot(1-p_2)+C_2^2\cdot p_1^2\cdot C_2^2\cdot p_2^2$

$=2p_1p_2\cdot(p_1+p_2)-3(p_1p_2)^2$. 因为$0\le p_1\le 1$，$0\le p_2\le 1$，$p_1+p_2=\dfrac{6}{5}$，

所以$\dfrac{1}{5}\le p_1\le 1$，$\dfrac{1}{5}\le p_2\le 1$，所以$P'=\dfrac{12}{5}p_1p_2-3(p_1p_2)^2$，

由基本不等式$p_1p_2\le\left(\dfrac{p_1+p_2}{2}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，当且仅当$p_1=p_2=\dfrac{3}{5}$时，等号成立，

所以$\frac{1}{25}\le p_1p_2\le\frac{9}{25}$，令$t=p_1p_2$，则$P'=h(t)=-3t^2+\frac{12}{5}t=-3\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{12}{25}$，$t\in\left[\frac{1}{5},\frac{9}{25}\right]$，

所以当$t=\frac{9}{25}$时，$P'_{\max}=\frac{297}{625}$，设他们小组在 n 轮竞赛中获“优秀小组”的次数为ξ，

则$\xi\sim B(n,P')$，由$nP'_{\max}=9$，得$n=\frac{9}{\frac{297}{625}}=\frac{625}{33}\approx19$，所以理论上至少要进行 19 轮竞赛.

20.【详解】(1) 依题意得$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\times2b\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，所以$b=1$，

另由$a^2=b^2+c^2=4$，$c=\sqrt{3}$，解得：$a^2=4$，　　所以椭圆的标准方程为程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) ①当l的斜率不存在时，则$A\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right),B\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$，$\overline{OA}+\overline{OB}=\left(2\sqrt{3},0\right)$，

因为$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OQ}$，所以点$Q\left(2\sqrt{3},0\right)$，而点$Q\left(2\sqrt{3},0\right)$不在椭圆上，故不存在点$Q$符合题意.

②当l的斜率存在时，设l的方程为$y=k\left(x-\sqrt{3}\right)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$Q(x_3,y_3)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k\left(x-\sqrt{3}\right)\end{cases}$得$\left(1+4k^2\right)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，

则$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}$，而$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2-2\sqrt{3}\right)=\frac{-2\sqrt{3}k}{1+4k^2}$，

因为$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OQ}$，则$(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_3,y_3)$，所以$Q\left(\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2},\frac{-2\sqrt{3}k}{1+4k^2}\right)$，

而Q在曲线上，所以$\frac{\left(\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}\right)^2}{4}+\left(\frac{-2\sqrt{3}k}{1+4k^2}\right)^2=1$，即$k^2=\frac{1}{8}$，所以$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，符合题意.

综上所述，存在点Q满足题意，此时直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\sqrt{3}\right)$或$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\sqrt{3}\right)$

21.【详解】(1) 由$f(x)=x\ln x+\frac{a}{x}$得$f'(x)=\ln x+1-\frac{a}{x^2},x>0$，

设直线$y=x$ 与曲线$y=f(x)$的切点为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}y_0=x_0\\ y_0=x_0\ln x_0+\frac{a}{x_0}\\ \ln x_0-\frac{a}{{x_0}^2}+1=1\end{cases}$，　解得$\begin{cases}x_0=\sqrt{\mathrm{e}}\\ a=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{cases}$因此$a$的值为$\frac{\mathrm{e}}{2}$.

（2）由 $g(x)=2xe^x-\ln x-x-\ln 2$ 得 $g'(x)=2e^x+2xe^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(2e^x-\frac{1}{x}\right)$

设 $h(x)=2e^x-\frac{1}{x}$，则 $h'(x)=2e^x+\frac{1}{x^2}$，

因为当 $x>0$ 时，$h'(x)=2e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h\left(\frac{1}{4}\right)=2e^{\frac{1}{4}}-4<0, h(1)=2e-1>0$, 所以存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使 $h(x_0)=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$；

从而 $g'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0]$ 上单调递减，在 $[x_0,+\infty)$ 上单调递增，

因此 $g(x)_{\min}=g(x_0)=2x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-\ln 2$，

由 $h(x_0)=0$，得 $h(x_0)=2e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0, x_0e^{x_0}=\frac{1}{2}$, 从而 $x_0+\ln x_0=-\ln 2$，

所以 $g(x)_{\min}=1+\ln 2-\ln 2=1$，由对于任意的 $x_1\in(0,+\infty)$，都存在 $x_2\in(0,+\infty)$，使 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立，

得对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geq g(x)_{\min}=1$，

即不等式 $x\ln x+\frac{a}{x}\geq 1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

即不等式 $a\geq x-x^2\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. 设 $\varphi(x)=x-x^2\ln x$，则 $\varphi'(x)=1-x-2x\ln x$

因为 $\varphi'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$1-x>0, 2x\ln x<0, \varphi'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1-x<0, 2x\ln x>0, \varphi'(x)<0$；

所以函数 $\varphi(x)=x-x^2\ln x$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=1$，因此 $a\geq 1$,故 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

22.【详解】(1)由直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t\\ y=\sqrt{3}-t\end{cases}$（$t$ 为参数），将 $x=-t$ 代入 $y=\sqrt{3}-t$ 中，

可得 l：$x-y+\sqrt{3}=0$；曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，所以有 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，即 $x^2+y^2=4y$，

所以 C_1：$x^2+(y-2)^2=4$.

(2)把曲线 C_1 图象向下平移 2 个单位，然后横坐标不变，纵坐标压缩到原来的 $\frac{1}{2}$，

可得C_2：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，可知$P\left(-\sqrt{3},0\right)$，所以$l$的标准参数方程为$\begin{cases}x=-\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），

代入$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$中，得$5t^2-2\sqrt{6}t-2=0$，

设M，N对应参数为t_1，t_2，则t_1，t_2即为上述方程的两根$t_1+t_2=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，$t_1t_2=-\dfrac{2}{5}$，

$$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_2|+|t_1|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{t_1t_2}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{\frac{24}{25}+\frac{8}{5}}}{\frac{2}{5}}=4.$$

23.【详解】（1）因为$a=2$，所以$f(x)=|x+2|+|x-3|$，

当$x\geq3$时，原不等式转化为$2x-1\geq2x$，无解.

当$-2<x<3$时，原不等式转化为$5\geq2x$，解得$-2<x\leq\dfrac{5}{2}$.

当$x\leq-2$时，原不等式转化为$-2x+1\geq2x$，解得$x\leq-2$.

综上所述，原不等式的解集为$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$；

（2）由已知可得$|x+a|+|x-3|\geq|a+3|$，

由不等式$f(x)\leq\dfrac{1}{2}a+5$的解集非空，可得$|a+3|\leq\dfrac{1}{2}a+5$，

则$-\dfrac{1}{2}a-5\leq a+3\leq\dfrac{1}{2}a+5$，

解得$-\dfrac{16}{3}\leq a\leq4$，故$a$的取值范围为$\left[-\dfrac{16}{3},4\right]$.