2023届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)答案
数学(文科)

1. B 【解析】∵ $z=\dfrac{3+4i}{2+i}=\dfrac{(3+4i)(2-i)}{5}=2+i$,

∴ $\bar{z}-i=2-2i$, ∴ $|\bar{z}-i|=2\sqrt{2}$. 故选 B.

2. C 【解析】由题意得, $M=(2,+\infty)$, $N=[-5,6]$,

∴ $M\cap N=(2,6]$. 故选 C.

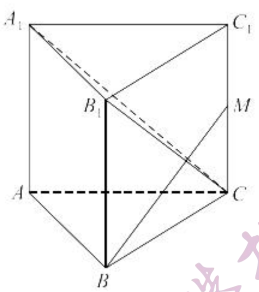
3. A 【解析】将点 $A(4,4)$ 代入抛物线方程得 $p=2$, 故抛物线方程为 $y^2=4x$, 故准线 l 的方程为 $x=-1$. 故点 A 到准线 l 的距离为 $4+1=5$. 故选 A.

4. B 【解析】$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2-4\times 2\cos A=-2$, 则 $\cos A=\dfrac{1}{2}$, 又 $0°<A<180°$, 则 $A=60°$. 故选 B.

5. C 【解析】对于 A, $S_2=a_3$, A 选项错误; 对于 B, $S_1=a_2$, B 选项错误; 对于 C, $S_n=2^n-1<2^n=a_{n+1}$, 故 C 正确; 对于 D, $S_1=\dfrac{1}{2}>a_2=\dfrac{1}{4}$, 故 D 错误. 故选 C.

6. C 【解析】$S=0$, $n=1$, $x=1$; 进入循环, $S=1$, $x=2$, $n=2$; 继续循环, $S=3$, $x=4$, $n=3$; 继续循环, $S=7$, $x=6$, $n=4$, 输出 $S=7$, 故 $N=3$. 故选 C.

7. A 【解析】连接 B_1C, 如图,



由题意知, $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C, ∵ $BM\subset$ 平面 BB_1C_1C, ∴ $A_1B_1\perp BM$, 且 $A_1C\perp BM$, $A_1B_1\cap A_1C=A_1$, ∴ $BM\perp$ 平面 A_1B_1C, ∵ $B_1C\subset$ 平面 A_1B_1C, ∴ $BM\perp B_1C$,

∴ $\triangle BCM\backsim\triangle B_1BC$, ∴ $\dfrac{CM}{BC}=\dfrac{BC}{BB_1}$, ∴ $BB_1=2\sqrt{2}$,

∴ 该三棱柱的体积 $V=S_{\triangle ABC}\cdot BB_1=4\sqrt{2}$.

故选 A.

8. D 【解析】由题意得 $a_n^2=\left(\dfrac{1}{3}\cdot 4^n-\lambda\right)-\left(\dfrac{1}{3}\cdot 4^{n-1}-\lambda\right)=4^{n-1}\ (n\geqslant 2)$, ∴ $a_n=2^{n-1}\ (n\geqslant 2)$,

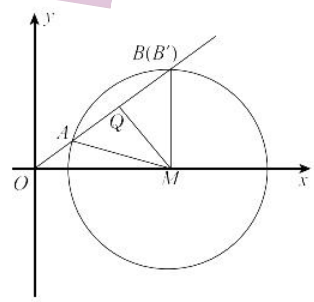
又 $\{a_n\}$ 为等比数列, ∴ $a_1=1$, ∴ $a_1^2=\dfrac{4}{3}-\lambda=1$,

∴ $\lambda=\dfrac{1}{3}$. 故选 D.

9. D 【解析】由题易知, $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$. 故选 D.

10. B 【解析】∵ $a,b>0$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10>2$, 则 $a+b>2ab$, 故①正确, ②错误; $0<\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\log_3 5-\log_3 2=\log_3\dfrac{5}{2}<\log_3 3=1$, 则 $a-b<ab$, 故③正确, ④错误. 故选 B.

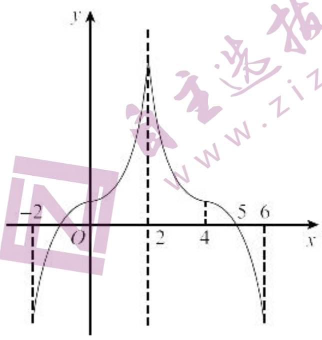
11. B 【解析】如图, 过点 M 作 x 轴的垂线交 $y=\dfrac{b}{a}x$ 于点 B',



则 $\dfrac{|MB'|}{|OM|}=\dfrac{b}{a}$, 故 $|MB'|=b$, 故点 B' 与点 B 重合, 即 $\angle OMB=90°$, 故 $|OB|=c$, 又 $\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}$, 则

$|AB|=\frac{2c}{3}$，取 Q 为 AB 的中点，则 $|MQ|^2=|BM|^2-|BQ|^2=b^2-\frac{c^2}{9}$，故在 $\triangle OMQ$ 中，$|MQ|^2+|OQ|^2=|OM|^2$，即 $b^2-\frac{c^2}{9}+\left(\frac{2c}{3}\right)^2=a^2$，解得 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故选 B.

12. D 【解析】由 $f(x)-1$ 为奇函数得 $f(-x)-1=-[f(x)-1]$，即 $f(-x)=2-f(x)$，∵ $f(x+2)$ 为偶函数，∴ $f(-x+2)=f(x+2)$，即 $f(-x)=f(x+4)$，∴ $f(x+4)=2-f(x)$，则 $f(x+8)=2-f(x+4)=2-[2-f(x)]=f(x)$，∴ $f(x)$ 的周期为 8，如图为 $f(x)$ 在 $[-2,6]$ 上的图象.



$a=f(11)=f(3)$，$3<\log_2 11<4$，∴ $f(3)>f(\log_2 11)$，即 $a>b$，$c=f(2^{11})=f(0)=f(4)<b<a$. 故选 D.

13. 12 【解析】$M=\frac{1}{6}\times(1+3+4+6+7+9)=5$，

$s^2=\frac{1}{6}\times[(1-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2]=7$，∴ $M+s^2=12$.

14. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，则 $f\left(\frac{T}{2}\right)=\cos(\pi+\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $|\varphi|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

15. $\frac{16\pi}{3}$ 【解析】由 $\angle BDC=90^\circ$ 可知，球心 O 在平面 BCD 的射影在 BC 的中点处，又平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，可知 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，故求得球 O 的半径为 $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$，∴ 球 O 的表面积为 $S_{球O}=4\pi R^2=\frac{16\pi}{3}$.

16. $\frac{2}{\ln 2}$ 【解析】令 $f(x)=e^x+x^{a+1}-ax^a\ln x-x^a=0$，则 $\frac{e^x}{x^a}+x-a\ln x-1=0$，即 $e^{x-a\ln x}+(x-a\ln x)-1=0$，令 $x-a\ln x=t$，则 $g(t)=e^t+t-1=0$，$g'(t)=e^t+1>0$，得 $g(t)$ 为增函数，故 $g(t)=0$ 有唯一解，即 $t=0$，即 $x-a\ln x=0$ 的两个解为 x_1，x_2，故 $x_1-a\ln x_1=0$，$2x_1-a\ln(2x_1)=0$，

故 $x_1=a\ln x_1$，$2x_1=a(\ln x_1+\ln 2)$，

两式相除得，$\frac{1}{2}=\frac{\ln x_1}{\ln x_1+\ln 2}$，解得 $x_1=2$，

故 $a=\frac{x_1}{\ln x_1}=\frac{2}{\ln 2}$.

17. **解：**(1) $\sin B+\sin C=\cos B+\cos C$，

则 $\sin B-\cos B=\cos C-\sin C$，

则 $\sqrt{2}\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$，

即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$，

故 $B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-C$ 或 $\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-C\right)=\pi$，

其中 $B-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-C=B-C=\pi$ 不合题意，

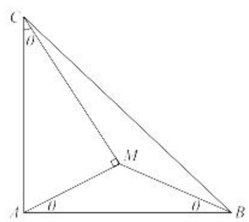
故 $B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-C$，

则 $B+C=\frac{\pi}{2}$，

则 $A=\frac{\pi}{2}$.

(2) 设 $\angle ACM=\theta$，又 $MA=MB$，则 $\angle MAB=\angle MBA=\theta$，设 $\angle ACB=\varphi$，则 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\varphi$，

如图，



在$\triangle MBC$中，由正弦定理得$\frac{MC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\theta\right)}=\frac{MB}{\sin(\varphi-\theta)}$，又$MC=2MB$，

则$2\sin(\varphi-\theta)=\cos(\varphi+\theta)$，

即$2(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)=\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta$①，

由$MC=2AM$，$\angle AMC=90^\circ$得，

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

代入①式整理得，$\sqrt{5}\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{5}}\cos\varphi$，

则$\tan\varphi=\frac{4}{5}$.

18. **解**：(1)运动俱乐部修建前职工每天运动的平均时间为$\bar{x}=\frac{1}{200}(36\times10+58\times30+81\times50+25\times70)=39.5$(分钟)；

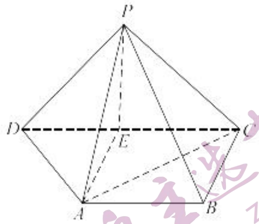
运动俱乐部修建后职工每天运动的平均时间为

$\bar{y}=\frac{1}{200}(18\times10+63\times30+83\times50+36\times70)=43.7$(分钟).

(2)方案1：两个M品牌用电器正常工作时间可能为(11月，11月)，(11月，12月)，(12月，11月)，(12月，12月)，共4种情况，设备正常运行时间为12个月的情况为(12月，12月)，共1种情况，故其概率为$\frac{1}{4}=0.25$；

方案2：1个M品牌和2个N品牌用电器正常工作时间可能为(11月，5月，5月)，(11月，5月，6月)，(11月，6月，5月)，(11月，6月，6月)，(12月，5月，5月)，(12月，5月，6月)，(12月，6月，5月)，(12月，6月，6月)，共8种情况，设备正常工作时间为12个月的情况为(12月，6月，6月)，共1种情况，故其概率为$\frac{1}{8}=0.125$.

19. **解**：(1)证明：取CD的中点E，连接PE，AE，如图，



易知$DE=\sqrt{2}$，$PD=2$，$\angle PDE=45^\circ$，

在$\triangle PDE$中，由余弦定理得，$PE^2=PD^2+DE^2-2PD\cdot DE\cos\angle PDE=2$，

则$DE^2=PE^2=PD^2$，

故$PE\perp CD$，

由$AD=2$，$DE=\sqrt{2}$，$\angle ADE=45^\circ$，同理可得$AE=\sqrt{2}$且$AE\perp CD$，

故$\angle AEP$为二面角$A-DC-P$的平面角，

又$PA=2$，则$AE^2+PE^2=PA^2$，

故$\angle PEA=90^\circ$，

故平面$PDC\perp$平面$ABCD$，

又CE与AB平行且相等，且$\angle AEC=90^\circ$，则四边形$ABCE$为矩形，故$BC\perp CD$，

又$BC\subset$平面$ABCD$，平面$PDC\cap$平面$ABCD=CD$，

故$BC\perp$平面PCD，又$BC\subset$平面PBC，则平面$PDC\perp$平面PBC.

(2)连接AC，设C到平面PAB的距离为h，由(1)得平面$ABCD\perp$平面PCD，$PE\perp CD$，由面面垂直的性质定理，同理可得$PE\perp$平面$ABCD$，

$V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$，

即$\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PE$，

$\because PE\perp CD$，$AE\perp CD$，$PE\cap AE=E$，PE，$AE\subset$平面AEP，

则$CD\perp$平面AEP，

又$AB/\!/CD$，故$AB\perp$平面AEP，$PA\subset$平面AEP，

故$PA\perp AB$，

故$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

故$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，

解得$h=1$.

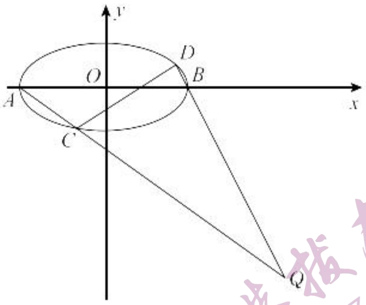
20. **解**:(1)设 $M(x,y)$,则由 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{1}{4}$ 得,

$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}$.

整理得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

∴椭圆 R 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)如图.



设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,$Q(x_0,y_0)$,

则相关直线的斜率满足 $\begin{cases}k_{QA}=k_{AC},\\ k_{QB}=k_{BD}.\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\frac{y_0}{x_0+2}=\frac{y_1}{x_1+2},\\ \frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_2}{x_2-2}.\end{cases}$

两式相除得 $\frac{x_0+2}{x_0-2}=\frac{y_2}{x_2-2}\cdot\frac{x_1+2}{y_1}$.

由(1)知,$\frac{y_2}{x_2+2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{1}{4}$.

即 $\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x_2+2}{y_2}$.

∴ $\frac{x_0+2}{x_0-2}=\frac{y_2}{x_2-2}\cdot\frac{x_1+2}{y_1}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x_2+2)(x_1+2)}{y_1y_2}$.

若 CD 与 x 轴垂直,则直线 CD 的方程为 $x=1$,

易得 $y_1y_2=-\frac{3}{4}$.

则 $\frac{x_0+2}{x_0-2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x_2+2)(x_1+2)}{y_1y_2}=-\frac{1}{4}\times\frac{9}{-\frac{3}{4}}=3$.

解得 $x_0=4$;

若 CD 不与 x 轴垂直,设直线 CD 的方程为 $y=k(x-1)$,代入椭圆方程化简得,$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$.

$\Delta>0$ 成立,则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$,

∴ $\frac{(x_2+2)(x_1+2)}{y_1y_2}=\frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}=$

$\frac{\frac{4k^2-4}{1+4k^2}+2\cdot\frac{8k^2}{1+4k^2}+4}{k^2\left(\frac{4k^2-4}{1+4k^2}-\frac{8k^2}{1+4k^2}+1\right)}=$

$\frac{4k^2-4+16k^2+4+16k^2}{k^2(4k^2-4-8k^2+1+4k^2)}=\frac{36k^2}{-3k^2}=-12$.

∴ $\frac{x_0+2}{x_0-2}=-\frac{1}{4}\times(-12)=3$.

解得 $x_0=4$.

综上可得,点 Q 的横坐标为 4.

21. **解**:(1)当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f(x)\geqslant e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$,则 $h'(x)=e^x-x-1$.

设 $G(x)=e^x-x-1$.

则 $G'(x)=e^x-1\geqslant0$.

故 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,则 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$.

则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数.

故 $h(x)\geqslant h(0)=0$.

故 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant0$,符合题意;

当 $a>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)=e^x-2ax-1$,设 $f'(x)=\varphi(x)$,则 $\varphi'(x)=e^x-2a$.

因为 $\varphi'(0)=1-2a<0$,当 $x\to+\infty$ 时,$\varphi'(x)\to+\infty$.

故 $\exists x_0\in(0,+\infty)$,使 $\varphi'(x_0)=0$.

则当 $x\in[0,x_0)$ 时,$\varphi'(x)<0$,则 $\varphi(x)$ 为减函数.

故 $f'(x)\leqslant f'(0)=0$,故 $f(x)$ 为减函数,

$f(x)\leqslant f(0)=0$,不合题意.

综上,$a\leqslant\frac{1}{2}$.

(2)证明:易知 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}$,易知 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,又 $g'(1)=0$.

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

故 $0<x_1<1<x_2$.

且 $g(1)=1-m<0$，则 $m>1$.

由(1)知，当 $x\geqslant1$ 时，$e^{x-1}\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2+x-1+1=\frac{1}{2}(x-1)^2+x$.

又 $\ln x\leqslant x-1$.

故当 $x\geqslant1$ 时，$g(x)\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2+x-x+1-m=\frac{1}{2}(x-1)^2+1-m$.

故 $\frac{1}{2}(x_2-1)^2+1-m\leqslant g(x_2)=0$.

又 $\frac{1}{2}(x-1)^2+1-m=0$ 的一个根为 $x_3=\sqrt{2m-2}+1$.

故 $\frac{1}{2}(x_3-1)^2+1-m=0=g(x_2)\geqslant\frac{1}{2}(x_2-1)^2+1-m$.

又 $x_2>1$，$x_3>1$，则 $x_2\leqslant x_3$.

又 $0<x_1$，则 $-x_1<0$.

则 $x_2-x_1<x_3+0=\sqrt{2m-2}+1$.

22. **解**：(1)由 $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t-1},\\ y=\dfrac{2\sqrt{t}}{t-1}\end{cases}$ (t 为参数)得，

$x^2-y^2=\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{t}}{t-1}\right)^2=\frac{(t+1)^2-4t}{(t-1)^2}=\frac{(t-1)^2}{(t-1)^2}=1$.

又 $xy=\frac{2\sqrt{t}(t+1)}{(t-1)^2}\geqslant0$，而 $x=\frac{t+1}{t-1}=1+\frac{2}{t-1}\neq1$.

故曲线 C 的普通方程为 $x^2-y^2=1(xy\geqslant0$，且 $x\neq1)$.

(注：只写出方程没写出 x,y 的取值范围的扣 1 分，取值范围按以下方式写也对.

又 $t\geqslant0$ 且 $t\neq1$，则当 $t\in[0,1)$ 时，$x=\frac{t+1}{t-1}\leqslant-1$，$y=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}\leqslant0$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$x=\frac{t+1}{t-1}>1$，$y=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}>0$)

由 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ 得，

$\rho\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=-\frac{1}{2}$.

代入 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得 $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=-\frac{1}{2}$.

即直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y+1=0$.

(2)将 $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t-1},\\ y=\dfrac{2\sqrt{t}}{t-1}\end{cases}$ 代入 $x+\sqrt{3}y+1=0$ 得，

$\frac{t+1}{t-1}+\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{t}}{t-1}+1=0$.

整理得 $t+\sqrt{3t}=0$，即 $\sqrt{t}(\sqrt{t}+\sqrt{3})=0$.

而 $\sqrt{t}+\sqrt{3}>0$.

故 $\sqrt{t}=0$，即 $t=0$.

则 $\begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}$

则直线 l 与曲线 C 的交点的直角坐标为 $(-1,0)$.

23. **证明**：(1) $6abc=a^2+2b^2+3c^2\geqslant3\sqrt[3]{a^2\cdot2b^2\cdot3c^2}=3\sqrt[3]{6(abc)^2}$.

当且仅当 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{3}c=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立，即 $2abc\geqslant\sqrt[3]{6(abc)^2}$.

则 $8(abc)^3\geqslant6(abc)^2$.

故 $abc\geqslant\frac{3}{4}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{3}c=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立.

(2)易知 $a^2+b^2\geqslant2ab$，$a^2+c^2\geqslant2ac$，$b^2+c^2\geqslant2bc$.

故 $\frac{3c}{a^2+b^2}+\frac{2b}{a^2+c^2}+\frac{a}{b^2+c^2}\leqslant\frac{3c}{2ab}+\frac{2b}{2ac}+\frac{a}{2bc}=\frac{3c^2+2b^2+a^2}{2abc}=\frac{6abc}{2abc}=3$.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。