



天津市南开中学 2023 届高三第四次月考

一、选择题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

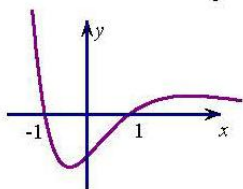
1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则集合 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{1,2,3,4\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1,2,5\}$ D. $\{1\}$

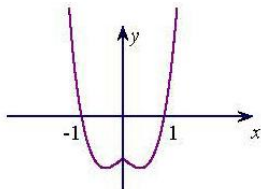
2. “ $\lg a > \lg b$ ”是“ $(a-2)^3 > (b-2)^3$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

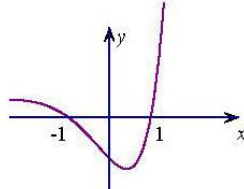
3. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{|x|}}$ 的图象可能是 ()



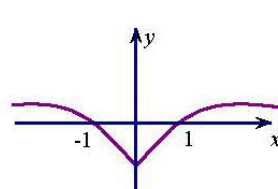
A.



B.



C.



D.

4. 学校组织班级知识竞赛, 某班的 12 名学生的成绩(单位: 分)分别是: 73, 74, 76, 82, 82, 87, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 则这 12 名学生成绩的 75% 分位数是 ()

- A. 92 B. 87 C. 93 D. 91

5. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.6}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}$, $c = 4^{\frac{1}{3}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

6. 已知一个正四棱柱所有棱长均为 3, 若该正四棱柱内接于半球体, 即正四棱柱的上底面的四个顶点在球面上, 下底面的四个顶点在半球体的底面圆内, 则半球体的体积为 ()

- A. $\frac{27\sqrt{6}}{2}\pi$ B. $54\sqrt{3}\pi$ C. $27\sqrt{6}\pi$ D. $27\sqrt{3}\pi$

7. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + 2\sin x \cos x (x \in \mathbb{R})$, 有下述三个结论:

① $f(x)$ 的最小正周期是 π ,

② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减;

③ 将 $f(x)$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 得到函数 $g(x) = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ① B. ② C. ①② D. ①②③



8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点 F 与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合, 过 F 作与双曲线的一条渐近线平行的直线 l , 交另一条渐近线于点 A , 交抛物线的准线于点 B , 若三角形 AOB (O 为原点) 的面积为 $3\sqrt{3}$, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + \frac{1}{4x^2 - 8x}, & 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x - 1, & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 2 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 4 个零点, 则

实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ B. $(-1, 0) \cup \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ C. $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right)$

二、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

10. 复数 z 满足 $\bar{z}i = 3 + 4i$ (i 是虚数单位), 则复数 z 为_____.

11. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3x}\right)^7$ 的展开式中, $\sqrt{x}$ 的系数是_____.

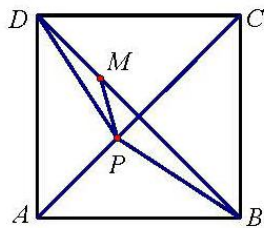
12. 经过点 $P(5, 5)$ 的直线 l 被圆 $C: x^2 + y^2 = 25$ 截得的弦长为 $4\sqrt{5}$, 则直线 l 的方程为_____.

13. 某电视台举办知识竞答闯关比赛, 每位选手闯关时需要回答三个问题. 第一个问题回答正确得 10 分, 回答错误得 0 分; 第二个问题回答正确得 20 分, 回答错误得 0 分; 第三个问题回答正确得 30 分, 回答错误得 -20 分. 规定, 每位选手回答这三个问题的总得分不低于 30 分就算闯关成功. 若某位选手回答前两个问题正确的概率都是 $\frac{2}{3}$, 回答第三个问题正确的

概率是 $\frac{1}{2}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响. 则该选手仅回答正确两个问题的概率是_____; 该选手闯关成功的概率是_____.

14. 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 则 $\frac{5a + b + 4a^2}{ab}$ 的最小值为_____.

15. 如图, 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{BP} =$ _____, 若点 M 为线段 BD (含端点) 上的动点, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最小值为_____.





三、解答题:

16.(本小题满分 14 分)

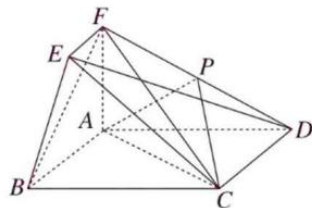
在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a=5, b=6, \cos B = -\frac{4}{5}$.

- (1)求 A 的值;
- (2)求 c 的值;
- (3)求 $\sin(2B+A)$ 的值.

17.(本小题满分 15 分)

如图所示的几何体中,四边形 $ABCD$ 为矩形, $AF \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $AD=2, AB=AF=2EF=1$, 点 P 为棱 DF 的中点.

- (1)求证: $BF \parallel$ 平面 APC ;
- (2)求直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值;
- (3)求平面 ACP 与平面 BCF 的夹角的余弦值.



18.(本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,右焦点为 F ,两焦点与短轴两端点围成的四边形面积为 $2\sqrt{3}$.

- (1)求椭圆 C 的标准方程;
- (2)直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M (M 在第一象限),此直线 l 与 y 轴的正半轴交于点 N ,直线 NF 与直线 OM 交于点 P 且 $S_{\triangle OFP} = \frac{3}{7} S_{\triangle OFN}$,求直线 l 的斜率.



19. (本小题满分 15 分)

设 $\{a_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1=1, a_3=a_2+2, a_4=b_3+b_5, a_5=b_4+2b_6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = (-1)^{n-1} a_n b_n + \frac{(b_n - 2)a_n - 1}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax$, 在点 $(t, f(t))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 1$.

(1) 求 a 的值;

(2) 已知 $k \leq 2$, 若 $x > 1$ 时, $f(x) > k\left(1 - \frac{3}{x}\right) + 2x - 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(3) 对于在 $(0, 1)$ 中的任意一个常数 b , 是否存在正数 x_0 , 使得 $e^{f(x_0+1)-3x_0-2} + \frac{b}{2}x_0^2 < 1$, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

