高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $(z-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{y|y=1-x^2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,1)$　　C. $[-3,1]$　　D. $[-3,1)$

3. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，$p:a<b$，$q:a^2>b(2a-b)$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知直线 l 与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，若直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\sin\theta\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{2}{5}$

5. 水雾喷头布置的基本原则是：保护对象的水雾喷头数量应根据设计喷雾强度、保护面积和水雾喷头特性，按水雾喷头流量 q(单位：L/min)计算公式为 $q=K\sqrt{10P}$ 和保护对象的水雾喷头数量 N 计算公式为 $N=\frac{S\cdot W}{q}$ 计算确定，其中 P 为水雾喷头的工作压力(单位：MPa)，K 为水雾喷头的流量系数(其值由喷头制造商提供)，S 为保护对象的保护面积，W 为保护对象的设计喷雾强度(单位：L/min · m²). 水雾喷头的布置应使水雾直接喷射和完全覆盖保护对象，如不能满足要求时应增加水雾喷头的数量. 当水雾喷头的工作压力 P 为 0.35 MPa，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，保护对象的保护面积 S 为 14 m²，保护对象的设计喷雾强度 W 为 20 L/min · m² 时，保护对象的水雾喷头的数量 N 约为(参考数据：$\sqrt{3.5}\approx 1.87$)

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

6. 在 $(2x-y+z)^7$ 的展开式中，$x^3y^2z^2$ 项的系数为

A. 1 680　　B. 210　　C. -210　　D. $-1\ 680$

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=9$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为

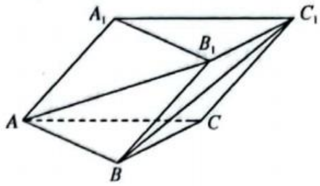
A. 64　　B. 53　　C. 42　　D. 25

8. 已知抛物线 $E:x^2=4y$，圆 $C:x^2+(y-3)^2=1$，P 为 E 上一点，Q 为 C 上一点，则 $|PQ|$ 的最小值为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}-1$

C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

9. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长均相等，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 设 $a=\frac{2}{\ln 2}$，$b=\frac{e^2}{4-\ln 4}$，$c=2\sqrt{e}$，则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$

C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x+1}$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象，则

A. π 为 $f(x)$ 的一个周期

B. $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

D. 曲线 $y=g(x)$ 在点 $(0,g(0))$ 处的切线斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知 A,B 分别为双曲线 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ 的左、右顶点，P 为该曲线上不同于 A,B 的任意一点，设 $\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，$\triangle PAB$ 的面积为 S，则

A. $\tan\alpha+\tan\beta$ 为定值　　B. $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$ 为定值

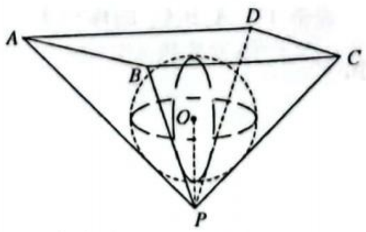
C. $S\cdot\tan(\alpha+\beta)$ 为定值　　D. $\frac{S}{\tan(\alpha+\beta)}$ 为定值

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=14$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$________.

14. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 与圆 $E:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$，写出圆 C 和圆 E 的一条公切线的方程________.

15. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 框架内放一个球 O，球 O 与侧棱 PA,PB,PC,PD 均相切. 若 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，且 $OP=2$，则球 O 的表面积为________.



16. 若 $f(x)=\sin x-2x+a$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内存在唯一的零点 x_1，$g(x)=ax-x^2-\cos x+a$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内存在唯一的零点 x_2，且 $x_1<x_2$，则实数 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B+\cos C}{b+c}$.

(1)求 A；

(2)已知 D 为边 BC 上一点，$\angle DAB=\angle DAC$，若 $AD=\sqrt{3}$，$a=3\sqrt{2}$，求△ABC 的周长.

18.(本小题满分 12 分)

无论是国际形势还是国内消费状况，2023 年都是充满挑战的一年，为应对复杂的经济形势，各地均出台了促进经济发展的各项政策，积极应对当前的经济形势，取得了较好的效果. 某市零售行业为促进消费，开展了新一轮的让利促销的活动，活动之初，利用各种媒体进行大量的广告宣传. 为了解传媒对本次促销活动的影响，在本市内随机抽取了 6 个大型零售卖场，得到其宣传费用 x(单位：万元)和销售额 y(单位：万元)的数据如下：

卖场	1	2	3	4	5	6
宣传费用	2	3	5	6	8	12
销售额	30	34	40	45	50	60

(1)求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测当宣传费用至少多少万元时(结果取整数)，销售额能突破 100 万元；

(2)经济活动中，人们往往关注投入和产出比，在这次促销活动中，设销售额与投入的宣传费用的比为 λ，若 $\lambda>10$，称这次宣传策划是高效的；否则为非高效的. 从这 6 家卖场中随机抽取 3 家.

①若抽取的 3 家中含有宣传策划高效的卖场，求抽取的 3 家中恰有一家是宣传策划高效的概率；

②若抽取的 3 家卖场中宣传策划高效的有 X 家，求 X 的分布列和数学期望.

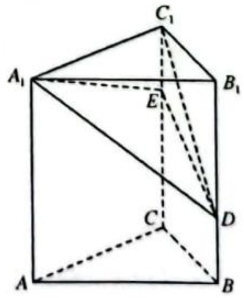
附：参考数据 $\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=1\ 752$，回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$ 的最小二乘法的估计公式分别为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.(本小题满分 12 分)

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 为棱 CC_1 上一点，$AB=CE=2$，$AA_1=3$，D 为棱 BB_1 上一点.

(1)若 $CA=CB$，且 D 为 BB_1 靠近 B 的三等分点，求证：平面 $A_1DE\perp$ 平面 ABB_1A_1；

(2)若△ABC 为等边三角形，且三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求二面角 $E-A_1D-C_1$ 的正弦值的大小.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $l:y=k_1x(k_1\neq0)$ 与 E 交于 A,B 两点，当 l 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一条渐近线时，A 到 y 轴的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1)求 E 的方程；

(2)若过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 H，OH 的中点为 N(O 为坐标原点)，连接 AN 并延长交 E 于点 P，直线 PB 的斜率为 k_2，求 $|k_1-k_2|$ 的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 有两个不同的零点，求 a 的取值范围；

(2)若函数 $g(x)=\frac{x}{2}f(x)-ax^2-x$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$\ln x_1+2\ln x_2>3$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=1$.

(1)求 C 的直角坐标方程以及 C 与 y 轴交点的极坐标；

(2)若直线 l 与 C 交于点 A,B，与 x 轴交于点 P，求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4－5：不等式选讲

已知关于 x 的不等式 $|x^2+ax+b|\leqslant2|x-4|\cdot|x+2|$ 对任意实数 x 恒成立.

(1)求满足条件的实数 a,b 的所有值；

(2)若 $x^2+ax+b\geqslant(m+2)x-m-15$ 对 $x>1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

高三理科数学综合参考答案、提示及评分细则

1. D　由 $(z-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2$，得 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 D.

2. C　由 $x^2+2x-3\leqslant 0$，得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，所以 $A=[-3,1]$；因为函数 $y=1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,1]$，所以 $B=(-\infty,1]$，所以 $A\cap B=[-3,1]$. 故选 C.

3. A　当 $a<b$ 时，$a^2-b(2a-b)=(a-b)^2>0$，即 $a^2>b(2a-b)$，所以 p 是 q 的充分条件；由 $a^2>b(2a-b)$ 推不出 $a<b$，所以 p 不是 q 的必要条件，故 p 是 q 的充分不必要条件. 故选 A.

4. D　由题意知直线 l 的斜率为 2，所以 $\tan\theta=2$，所以 $\sin\theta\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=-\dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=-\dfrac{2}{5}$. 故选 D.

5. C　由题意知，保护对象的水雾喷头的数量约为 $N=\dfrac{SW}{q}=\dfrac{SW}{K\sqrt{10P}}=\dfrac{14\times 20}{24.96\times\sqrt{10\times 0.35}}\approx\dfrac{280}{24.96\times 1.87}\approx 5.998\,9\approx 6$. 故选 C.

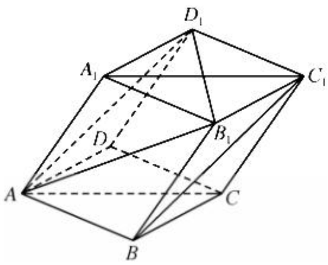
6. A　相当于在 7 个因式中有 3 个因式选 $2x$，有 C_7^3 种选法，余下的 4 个因式中有 2 个因式选 $-y$，有 C_4^2 种选法，最后余下 2 个因式中选 z，把所选式子相乘即可得 $x^3y^2z^2$ 项，而 $\mathrm{C}_7^3(2x)^3\cdot\mathrm{C}_4^2(-y)^2\mathrm{C}_2^2z^2=1\,680x^3y^2z^2$，所以 $x^3y^2z^2$ 的系数为 1 680. 故选 A.

7. B　法一：由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}-10=2(a_{n+1}-a_n-10)$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n-10\}$ 是首项是 -2，公比是 2 的等比数列，所以 $a_{n-1}-a_n-10=-2^n$，所以 $a_{n+1}-a_n=10-2^n$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为 $8,6,2,-6,-22,\cdots$，从第 4 项起为负数，故 $\{a_n\}$ 从第 4 项起单调递减，可知 $a_1=1,a_2=9,a_3=15,a_4=17,a_5=11,a_6=-11$，所以 $(S_n)_{\max}=S_5=53$. 故选 B.

法二：由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-10$，令 $a_{n+1}-a_n=b_n$，所以 $b_{n+1}=2b_n-10$，则 $b_{n+1}-10=2(b_n-10)$，所以数列 $\{b_n-10\}$ 是以 -2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n-10=-2\times 2^{n-1}=-2^n$，即 $b_n=-2^n+10$，即 $a_{n+1}-a_n=10-2^n$，由 $a_2-a_1=10-2^1$，$a_3-a_2=10-2^2$，$a_4-a_3=10-2^3$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=10-2^{n-1}(n\geqslant 2)$，将以上 $n-1$ 个等式两边相加得 $a_n-a_1=10(n-1)-\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=10n-2^n-8$，所以 $a_n=10n-2^n-7$，当 $n\leqslant 3$ 时，$a_{n+1}-a_n>0$，即 $\{a_n\}$ 单调递增，当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n+1}-a_n<0$，即 $\{a_n\}$ 单调递减，因为 $a_5=10\times 5-2^5-7=11>0$，$a_6=10\times 6-2^6-7=-11<0$，所以 $(S_n)_{\max}=S_5=1+9+15+17+11=53$. 故选 B.

8. B　由题意知 $C(0,3)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=4y_0$，$|PC|=\sqrt{x_0^2+(y_0-3)^2}=\sqrt{y_0^2-2y_0+9}=\sqrt{(y_0-1)^2+8}$，所以当 $y_0=1$ 时，$|PC|_{\min}=2\sqrt{2}$，所以 $|PQ|_{\min}=2\sqrt{2}-1$. 故选 B.

9. A　将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图所示），则 $\angle B_1AD_1$ 即为所求的角或其补角. 设三棱柱底面边长和侧棱长均为 1. 在 $\triangle AB_1D_1$ 中，$AB_1=\sqrt{3}$，$B_1D_1=\sqrt{3}$，$AD_1=\sqrt{2}$，$\cos\angle B_1AD_1=\dfrac{AB_1^2+AD_1^2-B_1D_1^2}{2AB_1\cdot AD_1}=\dfrac{3+2-3}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.



10. D　设 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}(x>1)$，$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $f'(x)<0$，得 $1<x<\mathrm{e}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}$，所以 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减；在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，又 $a=f(2)=\dfrac{2}{\ln 2}=\dfrac{4}{\ln 4}=f(4)$，$b=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4-\ln 4}=\dfrac{\frac{\mathrm{e}^2}{2}}{\ln\frac{\mathrm{e}^2}{2}}=f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$，$c=2\sqrt{\mathrm{e}}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\ln\sqrt{\mathrm{e}}}=f(\sqrt{\mathrm{e}})$，且 $1<\sqrt{\mathrm{e}}<2<\mathrm{e}<\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}<4$，所以 $f(\sqrt{\mathrm{e}})>f(2)=f(4)>f\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$，即 $c>a>b$. 故选 D.

11. B　对于 A，$f(x+\pi)=\dfrac{-\sin x-\cos x}{\sin x\cos x+1}=-f(x)$，故 π 不是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；对于 B，令 $t=\sin x+\cos x$，则 $t=$

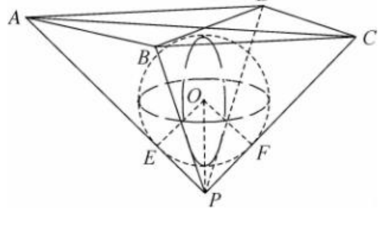
$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，所以原函数变为 $y=\frac{2t}{t^2+1}$，当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $t\neq0$ 时，$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$，又 $\left|t+\frac{1}{t}\right|\geqslant2$，所以 $\frac{1}{y}\leqslant-1$，或 $\frac{1}{y}\geqslant1$，所以 $-1\leqslant y<0$，或 $0<y\leqslant1$，综上 $-1\leqslant y\leqslant1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，故 B 正确；对于 C，$g(x)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{1-\frac{1}{2}\cos 2x}$，易得 $g(-x)=-g(x)$，$g(-x)-g(x)=-2g(x)\neq0$，所以 $g(-x)\neq g(x)$，故 C 错误；对于 D，$g'(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\sqrt{2}\sin x\sin 2x}{\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2}$，所以 $g'(0)=2\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 B.

12. C　不妨设 $P\left(\frac{3}{\cos\theta},\tan\theta\right)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan\alpha=\frac{\tan\theta}{\frac{3}{\cos\theta}-(-3)}=\frac{\sin\theta}{3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{3}\tan\frac{\theta}{2}$，$\tan\beta=-\frac{\tan\theta}{\frac{3}{\cos\theta}-3}=-\frac{\sin\theta}{3(1-\cos\theta)}=-\frac{1}{3\tan\frac{\theta}{2}}$，$S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\tan\theta=3\tan\theta=\frac{6\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$，因此 $\tan\alpha=\frac{1}{3}t$，$\tan\beta=-\frac{1}{3t}$，$S=\frac{6t}{1-t^2}$，其中 $t=\tan\frac{\theta}{2}$. 对于 A，$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3t}$ 不是定值. 对于 B，由于 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{4\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{1-\left(\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)+\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}}$，若 $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$ 为定值，则 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}$ 为定值，从而 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\beta}{2}$ 是确定的值，于是 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 均为定值，这是不可能的，故 B 错误. 对于选项 C，D，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}t-\frac{1}{3t}}{1+\frac{1}{3}t\cdot\frac{1}{3t}}=\frac{3(t^2-1)}{10t}$，因此 $S\cdot\tan(\alpha+\beta)=-\frac{9}{5}$ 是定值，$\frac{S}{\tan(\alpha+\beta)}$ 不是定值. 故选 C.

13. $3\sqrt{2}$　由 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=20-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4=14$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{10+4+4}=3\sqrt{2}$.

14. $x-\sqrt{3}y+1=0$，或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$，或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$（写出一个即可得分）　由题意，得圆 C 与圆 E 相外切，且 $C(1,0)$，$E(0,\sqrt{3})$，则 $k_{CE}=-\sqrt{3}$. 过 CE 中点且与 CE 垂直的直线是两圆的内公切线，其方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即内公切线方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$；又圆 C 与圆 E 半径相等，故外公切线与 CE 平行，所以圆 C 与圆 E 的外公切线的方程可设为 $y=-\sqrt{3}x+b$，即 $\sqrt{3}x+y-b=0$，则 $\frac{|\sqrt{3}\times1+0-b|}{2}=1$，所以 $b=\sqrt{3}+2$ 或 $b=\sqrt{3}-2$，所以两条外公切线的方程为 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$，或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$.

15. 8π　连接 AC，BD，由题意得 $PA=PB=PC=PD=AB=BC=CD=DA$，又 $AC=BD=\sqrt{2}AB$，所以 $\angle APC=\frac{\pi}{2}$. 设球 O 与 PA，PC 的切点分别为 E，F，连接 OE，OF，因为 $OE=OF$，所以 $\angle OPE=\angle OPF=\frac{\pi}{4}$，所以 $OE=OP\sin\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. 即球 O 的半径 $R=\sqrt{2}$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$.



16. $(-2\pi,-1-\pi]$　$f'(x)=\cos x-2<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有唯一零点 x_1，所以 $f(-\pi)=2\pi+a>0$，$f(\pi)=-2\pi+a<0$，所以 $-2\pi<a<2\pi$；$g'(x)=\sin x-2x+a=f(x)$，令 $g'(x)=0$，即 $f(x)=0$，则 $x=x_1$，且 $-\pi<x<x_1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x_1<x<\pi$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\pi,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,π) 上单调递减，因为 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有唯一零点 x_2 且 $x_1<x_2$，所以 $g(-\pi)=-a\pi-\pi^2+1+a\geqslant 0$，$g(\pi)=a\pi-\pi^2+1+a<0$，所以 $a\leqslant -1-\pi$. 综上，实数 a 的取值范围为 $(-2\pi,-1-\pi]$.

17. 解：(1)因为 $\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos B+\cos C}{b+c}$，由正弦定理，得 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}$，……………… 1分

所以 $\sin A\cos B+\sin A\cos C=\cos A\sin B+\cos A\sin C$，

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\cos A\sin C-\sin A\cos C$，……………… 2分

所以 $\sin(A-B)=\sin(C-A)$. ……………… 3分

因为 $A-B\in(-\pi,\pi)$，$C-A\in(-\pi,\pi)$，所以 $A-B=C-A$，或 $(A-B)+(C-A)=2\times\dfrac{\pi}{2}$，或 $(A-B)+(C-A)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，……………… 4分

即 $2A=B+C$，或 $C=B+\pi$(舍)，或 $B=C+\pi$(舍)，

又 $A+B+C=\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………… 5分

(2)由题意得 $S_{\triangle DAB}+S_{\triangle DAC}=S_{\triangle ABC}$，

即 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle DAB+\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle DAC=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$. ……………… 7分

因为 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle DAB=\angle DAC=\dfrac{\pi}{6}$，且 $AD=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB+\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB\cdot AC$.

所以 $AB+AC=AB\cdot AC$，即 $c+b=cb$. ……………… 8分

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc$，……………… 9分

所以 $(b+c)^2-3(b+c)-18=0$，所以 $b+c=6$，或 $b+c=-3$(舍)，……………… 11分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6+3\sqrt{2}$. ……………… 12分

18. 解：(1) $\bar{x}=\dfrac{2+3+5+6+8+12}{6}=6$，$\bar{y}=\dfrac{30+34+40+45+50+60}{6}=\dfrac{259}{6}$.

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=2^2+3^2+5^2+6^2+8^2+12^2=282$，……………… 1分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\dfrac{1752-6\times6\times\dfrac{259}{6}}{282-6\times6^2}=\dfrac{198}{66}=3$.

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\dfrac{259}{6}-3\times6=\dfrac{151}{6}$.

所以 $\hat{y}=3x+\dfrac{151}{6}$. ……………… 3分

令 $3x+\dfrac{151}{6}=100$，解得 $x=\dfrac{449}{18}=24.9\dot{4}$(万元).

故当宣传费用至少为25万元时，销售额能突破100万元. ……………… 4分

(2)①记事件 A 为抽取的3家中含有宣传策划高效的卖场，事件 B 为抽取的3家卖场中恰有1家为宣传策划高效.
……………… 5分

由已知数据，卖场1，2的宣传策划是高效的，卖场3，4，5，6的宣传策划是非高效的，

法一：$P(A)=\dfrac{C_4^2C_2^1+C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{4}{5}$，$P(AB)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3}{4}$. ……………… 7分

法二：$P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_4^2C_2^1+C_4^1C_2^2}=\dfrac{3}{4}$. ……………… 7分

②由题意知 X 的取值为0，1，2，则

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，………………………………… 10 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$. ………………………………………… 12 分

19. (1)证明：分别取 AB,A_1D 的中点 O,F，连接 CO,FO,EF，则 $CO\perp AB,CO\perp AA_1,OF/\!/AA_1/\!/BD$，且 $OF=\frac{AA_1+BD}{2}$.

………………………………………………………………………………… 2 分

由题意知 $BD=\frac{1}{3}BB_1=1$，

所以 $OF=2$，又 $OF/\!/AA_1/\!/CE,CE=2$，……………………………………………… 3 分

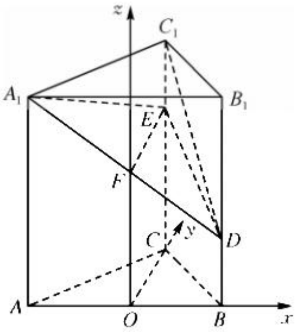
所以 $OF/\!/CE$，且 $OF=CE$，所以四边形 $CEFO$ 为平行四边形，

所以 $EF/\!/CO$，所以 $EF\perp AB,EF\perp AA_1$. ……………………………… 4 分

又 $AA_1\cap AB=A,AA_1,AB\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $EF\perp$平面 ABB_1A_1，

因为 $EF\subset$平面 A_1DE，所以平面 $A_1DE\perp$平面 ABB_1A_1. ……………… 5 分

(2)解：由(1)可得 $CO\perp OF,FO\perp AB,AB\perp CO$，以 O 为坐标原点，直线 OB,OC,OF 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$. ……………………… 6 分



因为三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot B_1D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

即 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)\times B_1D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.**解得 $B_1D=2$，所以 $BD=1$**，………… 7 分

则 $D(1,0,1),A_1(-1,0,3),E(0,\sqrt{3},2)$，$C_1(0,\sqrt{3},3)$，**所以** $\overrightarrow{A_1D}=(2,0,-2),\overrightarrow{A_1C_1}=(1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{A_1E}=(1,\sqrt{3},-1)$. ……………………………………………………………… 8 分

设平面 A_1DE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ x+\sqrt{3}y-z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$，解得 $x=1,y=0$.

故 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. ……………………………………………………………… 9 分

设平面 A_1DC_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a-2c=0,\\ a+\sqrt{3}b=0,\end{cases}$ 令 $b=1$，解得 $a=-\sqrt{3},c=-\sqrt{3}$.

故 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$. ……………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………… 11 分

设二面角 $E-A_1D-C_1$ 的大小为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\frac{42}{49}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

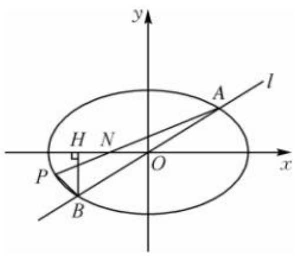
即二面角 $E-A_1D-C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设 E 的半焦距为 c，则 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}b$. ① ……………………… 1 分

不妨设 $l:y=\frac{1}{a}x$，与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立，得 $|x|=\frac{ab}{\sqrt{b^2+1}}$.

由题意得 $|x|=\frac{ab}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ② ……………………………………… 3 分

①②联立并解得 $b^2=2,a^2=4$，故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………… 5 分



(2)设 $A(x_1,y_1)$, $P(x_2,y_2)$, 则 $B(-x_1,-y_1)$, $H(-x_1,0)$, $N\left(-\frac{x_1}{2},0\right)$,

所以直线 AP 的斜率 $k=\dfrac{y_1-0}{x_1-\left(-\frac{x_1}{2}\right)}=\dfrac{2y_1}{3x_1}=\dfrac{2}{3}k_1$, ………………………………………… 6 分

直线 AP 的方程为 $y=k\left(x+\frac{x_1}{2}\right)$, 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$, 得 $(2k^2+1)x^2+2k^2x_1x+\frac{1}{2}k^2x_1^2-4=0$,

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2k^2x_1}{2k^2+1}$, ………………………………………… 8 分

$y_1+y_2=k\left(x_1+\frac{x_1}{2}\right)+k\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)=k(x_1+x_2+x_1)=\dfrac{kx_1}{2k^2+1}$, ………………………… 9 分

所以 $k_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{\frac{kx_1}{2k^2+1}}{-\frac{2k^2x_1}{2k^2+1}}=-\dfrac{1}{2k}=-\dfrac{1}{2\times\frac{2}{3}k_1}=-\dfrac{3}{4k_1}$, ………………………… 10 分

所以 $|k_1-k_2|=\left|k_1+\frac{3}{4k_1}\right|=|k_1|+\frac{3}{4|k_1|}\geqslant 2\sqrt{|k_1|\times\frac{3}{4|k_1|}}=\sqrt{3}$, 当且仅当 $|k_1|=\frac{3}{4|k_1|}$, 即 $k_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立, 所以当 $k_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $|k_1-k_2|$ 取得最小值, 且最小值为 $\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

21. (1)解: $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{2x-a}{x^2}$. ………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 最多有一个零点, 不合题意, 舍去; ……………… 2 分

当 $a>0$ 时, 当 $0<x<\frac{a}{2}$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>\frac{a}{2}$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………………………………… 3 分

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=2\ln\frac{a}{2}+2<0$, 解得 $0<a<\frac{2}{e}$. ………………………… 4 分

当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时, $f\left(\frac{a}{2}\right)<0$, $f(e)=2+\frac{a}{e}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},e\right)$ 上存在唯一零点;

当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时, 取正整数 $n>2$, 则 $0<\frac{a}{n}<\frac{a}{2}$. $f(x)=\frac{2x\ln x+a}{x}>0\Leftrightarrow x\ln x>-\frac{a}{2}$.

而 $\frac{a}{n}\ln\frac{a}{n}>-\frac{a}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{a}{n}>-\frac{n}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{n}>e^{-\frac{n}{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{2}>\dfrac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 当 $x>1$ 时, 易证 $e^x>x^2$.

又 $\frac{n}{2}>1$, 所以 $e^{\frac{n}{2}}>\left(\frac{n}{2}\right)^2$, 于是 $\dfrac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}<\dfrac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\frac{2}{n}$, 要使 $\frac{a}{2}>\dfrac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 只需 $\frac{a}{2}\geqslant\frac{2}{n}$, 即 $n\geqslant\frac{4}{a}$.

这样, 当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时, 只需取正整数 $n\geqslant\frac{4}{a}$, 则 $f\left(\frac{a}{n}\right)>0$.

又 $f\left(\frac{a}{2}\right)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$. ………………………………………… 6 分

(2)证明: $g(x)=\frac{x}{2}f(x)-ax^2-x=x\ln x-ax^2-x+\frac{a}{2}$, 则 $g'(x)=\ln x-2ax$,

因为 $g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 则 $\ln x_1=2ax_1$, $\ln x_2=2ax_2$,

要证 $\ln x_1+2\ln x_2>3$, 只要证 $3<2ax_1+4ax_2=2a(x_1+2x_2)$,

因为 $0<x_1<x_2$, 所以只要证 $2a>\frac{3}{x_1+2x_2}$. ………………………………………… 8 分

又由 $\ln x_1=2ax_1$, $\ln x_2=2ax_2$, 作差得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=2a(x_1-x_2)$, 所以 $2a=\dfrac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$,

所以原不等式等价于 $\dfrac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{3}{x_1+2x_2}$, 即 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\dfrac{3(x_1-x_2)}{x_1+2x_2}=\dfrac{3\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+2}$.

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，只需证明 $\ln t<\frac{3(t-1)}{t+2}$. ······ 10 分

令 $h(t)=\ln t-\frac{3(t-1)}{t+2}$，$t\in(0,1)$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{9}{(t+2)^2}=\frac{t^2-5t+4}{t(t+2)^2}=\frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2}>0$，······ 11 分

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h(t)<h(1)=0$，即 $\ln t<\frac{3(t-1)}{t+2}$.

所以 $\ln x_1+2\ln x_2>3$. ······ 12 分

22. 解：(1) 由 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=1$，得 $\rho\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}=1$，即 $\rho-\rho\cos\theta=2$. ······ 1 分

又 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=\rho\cos\theta$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}-x=2$，······ 2 分

化简，得 $y^2=4x+4$，即 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x+4$. ······ 3 分

其与 y 轴交点的直角坐标为 $(0,2)$ 和 $(0,-2)$，······ 4 分

对应的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$.（答案不唯一，符合即可得分）······ 5 分

(2) 易知点 P 的直角坐标为 $(1,0)$，将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程，得 $3t^2-8t-32=0$，······ 6 分

显然 $\Delta=(-8)^2-4\times3\times(-32)=448>0$，······ 7 分

设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\frac{8}{3}$，$t_1t_2=-\frac{32}{3}$，

显然 t_1，t_2 一正一负，······ 8 分

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}$

$=\frac{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{32}{3}\right)}}{\frac{32}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ······ 10 分

23. 解：(1) 当 $x=4$ 时，不等式化为 $|16+4a+b|\leqslant0$，

而 $|16+4a+b|\geqslant0$，

所以 $|16+4a+b|=0$. ① ······ 2 分

当 $x=-2$ 时，同理可得 $|4-2a+b|=0$. ② ······ 3 分

联立①和②，解得 $a=-2$，$b=-8$. ······ 4 分

而 $a=-2$，$b=-8$ 时，原不等式为 $|x^2-2x-8|\leqslant2|x^2-2x-8|$，

显然恒成立，所以 $a=-2$，$b=-8$. ······ 5 分

(2) 由 (1) 知 $x^2-2x-8\geqslant(m+2)x-m-15$，

所以 $(x-1)m\leqslant x^2-4x+7$. ······ 6 分

因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $m\leqslant\frac{x^2-4x+7}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $y=\frac{x^2-4x+7}{x-1}(x>1)$，则 $m\leqslant y_{\min}$. ······ 7 分

因为 $y=\frac{x^2-4x+7}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}-2\geqslant2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}-2=2$，······ 8 分

当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$，即 $x=3$ 时等号成立，所以 $y_{\min}=2$，······ 9 分

所以 $m\leqslant2$，即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ······ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。