高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(x+2)\}$，$B=\{x|2^{x-1}>2\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$

A. $(-2,2]$　　B. $(0,2)$　　C. $[0,2)$　　D. $(-2,0]$

2. 若复数 z 满足 $z+2\bar{z}=2+i$，其中 i 为虚数单位，则 $z=$

A. $3-2i$　　B. $2+3i$　　C. $\frac{2}{3}-i$　　D. $\frac{2}{3}+i$

3. 已知圆台的上底面半径为2，下底面半径为4，若该圆台的体积为 56π，则其母线长为

A. $2\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{10}$

4. 甲、乙两人独立解某一道数学题，已知该题被甲独立解出的概率为0.7，被甲或乙解出的概率为0.94，则该题被乙独立解出的概率为

A. 0.9　　B. 0.8　　C. 0.7　　D. 0.6

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 在 $(x^2-x+y)^6$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为

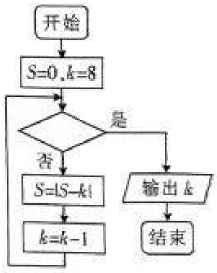
A. 4　　B. -4　　C. -60　　D. 60

7. 已知 x_0 是函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-x+4$ 的一个零点，若 $x_1\in(2,x_0)$，$x_2\in(x_0,+\infty)$，则

A. $x_0\in(2,4)$　　B. $f(x_1)>f(x_2)$

C. $f(x_1)<0,f(x_2)<0$　　D. $f(x_1)>0,f(x_2)>0$

8. 某程序框图如图所示，若输出的 $k=3$，则判断框内的条件可以是



A. $S=2$?

B. $S=3$?

C. $S=4$?

D. $S=5$?

9. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_1=2$，$S_{n+1}-3S_n=2$，则

B. $a_n=3^{n-1}$

D. $S_n=3^n-1$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，以 F 为圆心，a 为半径的圆与双曲线的一条渐近线的两个交点为 A、B. 若 $\angle AFB=60°$，则该双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

11. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+3x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $g(x)=x+\frac{a}{2x}$ 在区间 $(1,2]$ 上既有最大值又有最小值，则实数 a 的取值范围是

A. $[3,4)$　　B. $(2,3]$　　C. $(3,4]$　　D. $[2,3)$

12. 在底面是边长为 4 的正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，点 P 在底面的射影 H 为正方形 $ABCD$ 的中心，异面直线 PB 与 AD 所成角的正切值为 $\frac{3}{2}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球与外接球的半径之比为

A. $\frac{6}{17}$　　B. $\frac{5}{16}$　　C. $\frac{4}{13}$　　D. $\frac{7}{18}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=(x^2-2x)\ln 2x$ 在点 $(1,-\ln 2)$ 处的切线方程为________.

14. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题："今有金箠，长五尺. 斩本一尺，重四斤. 斩末一尺，重二斤. 问次一尺各重几何?"意思是"现有一根金杖，长五尺，一头粗，一头细. 在粗的一端截下 1 尺，重 4 斤；在细的一端截下 1 尺，重 2 斤；问依次每一尺各重多少斤?"根据上题的已知条件，若金杖由粗到细是均匀变化的，估计此金杖总重量约为________斤.

15. 若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，又 $A(\alpha,2)$，$B(\beta,0)$ 是函数 $f(x)$ 的图象上的两点，且 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{4+\frac{\pi^2}{4}}$，则 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 的值为________.

16. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线 l 交 x 轴于点 E，过 F 的直线与 C 在第一象限的交点为 A，则 $\frac{|AE|}{|AF|}$ 的最大值为________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且$\frac{a}{bc}=\frac{\cos C}{c}+\frac{\sin B}{b}$.

(1)求 B;

(2)若$\frac{a}{\sqrt{2}b+c}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$,求 A.

18. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,$PB\perp PD$.

(1)证明:$PB\perp$平面 PAD;

(2)若 $PA=PB$,$BE=2EC$,且 $AB=2$,$BC=3$,求二面角 $C-PD-E$ 的余弦值.

19. (12 分)

中学阶段是学生身体发育最重要的阶段,长时间熬夜学习严重影响学生的身体健康. 某校为了解甲、乙两班学生每周自我熬夜学习的总时长(单位:小时),分别从这两个班中随机抽取 5 名同学进行调查,得到他们最近一周自我熬夜学习的总时长的样本数据:来源:高三答案公众号

甲班	8	13	28	32	39
乙班	12	25	26	28	31

如果学生平均每周自我熬夜学习的总时长超过 26 小时,则称为"过度熬夜".

(1)请根据样本数据,分别估计甲、乙两班的学生平均每周自我熬夜学习时长的平均值;

(2)从甲班、乙班的样本中各随机抽取 2 名学生的数据,记"过度熬夜"的学生总数为 X,写出 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

20.（12 分）

已知椭圆 C 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴，y 轴，且过 $(2,0)$，$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 两点.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)是否存在直线 l，使得直线 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，与椭圆 C 交于 A，B 两点，且满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$（$O$ 为坐标原点）？若存在，请求出直线 l 的方程，若不存在，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}-ax(a\geqslant 0)$.

(1)若 a = 0，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若存在 $x_1\in[e,e^2]$，使 $f(x_1)\leqslant\frac{1}{4}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程.

(2)求曲线 C 上的点到直线 l 距离的最小值.

23.[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)<4$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)<4$ 的解集为集合 M，a，$b\in M$，求证：$\frac{|a+b|}{|ab+1|}<1$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. A 由 $A=\{x|y=\lg(x+2)\}=\{x|x+2>0\}=\{x|x>-2\}$, $B=\{x|2^{x-1}>2\}=\{x|2^{x-1}>2^1\}=\{x|x>2\}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant 2\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-2,2]$.

2. C 设复数 $z=x+y\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=x-y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $z+2\bar{z}=x+y\mathrm{i}+2x-2y\mathrm{i}=3x-y\mathrm{i}=2+\mathrm{i}$,则 $x=\frac{2}{3}$, $y=-1$,所以 $z=\frac{2}{3}-\mathrm{i}$.

3. D 圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(2^2+4^2+2\times4)\times h=56\pi$,解得 $h=6$,故圆台母线长 $l=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

4. B 设乙独立解出的概率为 P,由题意可得 $1-0.3\times(1-P)=0.94$, $\therefore P=0.8$.

5. A 因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,所以 $|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$,因为 $|\boldsymbol{a}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,所以 $4-2+|\boldsymbol{b}|^2=3$,所以 $|\boldsymbol{b}|=1$, $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

6. C $(x^2-x+y)^6=[(x^2-x)+y]^6$,其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2-x)^{6-r}y^r$,若先满足 x^5y^2 中 y^2 的次数,则 $r=2$,可得 $T_3=15(x^2-x)^4y^2$,其中 $(x^2-x)^4$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_4^k(x^2)^{4-k}(-x)^k=(-1)^kC_4^kx^{8-k}$,令 $8-k=5$,得 $k=3$,所以 $T_4=-4x^5$,故 x^5y^2 的系数为 $-4\times15=-60$.

7. B 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减,函数 $y=-x+4$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减,故函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-x+4$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减. 又 $f(2)>0$, $f(3)>0$, $f(4)>0$, $f(5)<0$, $\therefore x_0\in(4,5)$. $f(x_0)=0$, $x_1\in(2,x_0)$, $x_2\in(x_0,+\infty)$,则 $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

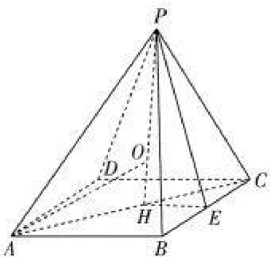
8. C $S=0,k=8$;$S=8,k=7$;$S=1,k=6$;$S=$[illegible]$,k=5$;$S=$[illegible]$,k=4$;$S=4,k=3$,输出 $k=3$,则判断框内应填入"$S=4$?"

9. D 由 $a_1=2$, $S_{n+1}-3S_n=2$ 得 $S_n-3S_{n-1}=2$,相减得 $a_{n+1}=3a_n$,所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2,公比为 3 的等比数列, $\therefore a_n=2\cdot3^{n-1}$, $S_n=3^n-1$.

10. D 由题意知 $F(c,0)$ 到直线 $bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$,所以 $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,因为 $a^2+b^2=c^2$,所以 $b=\frac{\sqrt{3}a}{2}$, $c^2=\frac{7}{4}a^2$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

11. B $f'(x)=3x^2-2ax+3$,因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f'(x)\geqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,即 $3x^2-2ax+3\geqslant0$ 恒成立, $\Delta=4a^2-36\leqslant0$,解得 $-3\leqslant a\leqslant3$, $g(x)$ 在 $(1,2]$ 上既有最大值,又有最小值, $g(2)\geqslant1+\frac{a}{2}$ 且 $1<\sqrt{\frac{a}{2}}<2$,所以 $2<a\leqslant4$,综上所述, $2<a\leqslant3$.

12. C 由题可得四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥,即有 $PA=PB=PC=PD$. 因为 $AD\,/\!/\,BC$,所以异面直线 PB 与 AD 所成的角为 $\angle PBC$,取 BC 中点 E,则 $\tan\angle PBC=\frac{PE}{BE}=\frac{3}{2}$,所以 $PE=3$, $HP=\sqrt{5}$. 从而可以求得四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积和体积分别为 $S=\frac{1}{2}\times4\times3\times4+4^2=40$, $V=\frac{1}{3}\times4\times4\times\sqrt{5}=\frac{16\sqrt{5}}{3}$,所以内切球的半径为 $r=\frac{3V}{S}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

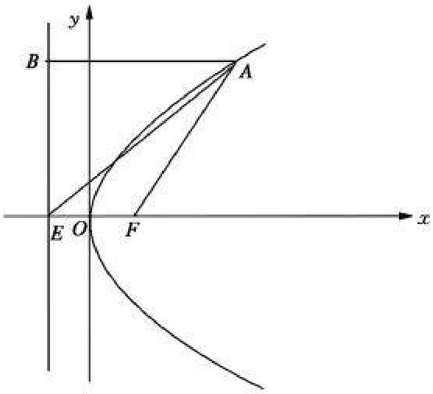


设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O,外接球的半径为 R,则 $OP=OA$,则 $(\sqrt{5}-R)^2+(2\sqrt{2})^2=R^2$,解得 $R=\frac{13\sqrt{5}}{10}$,所以 $\frac{r}{R}=\frac{4}{13}$.

13. $y=-x+1-\ln2$ 因为 $y'=(2x-2)\ln2x+x-2$,所以 $y'\big|_{x=1}=-1$,所求切线的斜率 $k=-1$,故所求切线方程为 $y=-x+1-\ln2$.

14. 15 这是一道可近似地看作等差数列问题,设首项为 2,则第 5 项为 4,所以总重量为 $\frac{(2+4)}{2}\times5=15$ 斤.

15. -1 由条件可知 $T=2\pi=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega=1$, $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\frac{7\pi}{6}=-1$.



16. $\sqrt{2}$　由题意可知，$F(2,0)$，$E(-2,0)$．如图所示，过 A 作 $AB\perp l$，垂足为 B，因为 $|AF|=|AB|$，所以 $\frac{|AE|}{|AF|}=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{1}{\sin\angle AEB}$.

只要 $\sin\angle AEB$ 最小，满足题意，即 $\angle AEB$ 最小，结合图形可知，AE 与 C 相切时，$\angle AEB$ 最小．来源：高三答案公众号

设直线 AE 的方程为 $y=k(x+2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x+2),\\y^2=8x,\end{cases}$ 得，$y^2-\frac{8}{k}y+16=0$，

由 $\Delta=\left(-\frac{8}{k}\right)^2-4\times16=0$，解之得 $k=1$ 或 $k=-1$（舍去），

此时 $\sin\angle AEB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{|AE|}{|AF|}$ 取得最大值 $\sqrt{2}$.

17. 解：(1)由已知及正弦定理得 $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，

因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$.

所以 $\sin C\sin B=\sin C\cos B$，································ 2 分

因为 $\sin C\neq0$，所以 $\sin B=\cos B$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$．································ 5 分

(2)因为 $\frac{a}{\sqrt{2}b+c}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

由正弦定理化简得 $\sqrt{2}\sin B+\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin A$，································ 6 分

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

所以 $\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin A$．································ 8 分

所以 $1=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A)=\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{6})$．································ 10 分

所以 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $A\in(0,\frac{3\pi}{4})$，所以 $A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12})$，

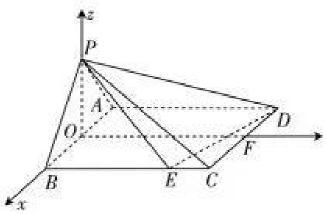
所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，$A=\frac{5\pi}{12}$．································ 12 分

18. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\perp AB$，

又平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD\perp$ 平面 PAB，因为 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $PB\perp AD$．································ 2 分

因为 $PB\perp PD$，$PD\cap AD=D$，PD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $PB\perp$ 平面 PAD．································ 4 分



(2)解：如图，取 AB 中点为 O，连接 PO，由 $PB\perp$ 平面 PAD 知 $PA\perp PB$，

又 $PA=PB$，$AB=2$，所以 $PO=1$ 且 $PO\perp AB$，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

取 CD 中点 F，连接 OF，则 $OF\parallel AD$，由(1)知 $OF\perp$ 平面 PAB，

于是以 O 为坐标原点，OB，OF，OP 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系．

则 $C(1,3,0)$，$P(0,0,1)$，$D(-1,3,0)$，$E(1,2,0)$，································ 7 分

$\overrightarrow{PC}=(1,3,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PE}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{DE}=(2,-1,0)$．································ 8 分

设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+3y-z=0,\\-2x=0.\end{cases}$ 取 $y=1$ 得一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,3)$，································ 9 分

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+2y_1-z_1=0,\\2x_1-y_1=0.\end{cases}$ 取 $x_1=1$ 得一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,5)$，································ 10 分

设二面角 $C-PD-E$ 的平面角大小为 α，则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{17\sqrt{3}}{30}$．··············

19. 解：(1)甲班样本数据的平均值为$\frac{1}{5}(8+13+28+32+39)=24$,

由此估计甲班学生每周平均熬夜时间 24 小时； …………………………………………………… 2 分

乙班样本数据的平均值为$\frac{1}{5}(12+25+26+28+31)=24.4$,

由此估计乙班学生每周平均熬夜时间 24.4 小时. …………………………………………………… 4 分

(2)X 的可能取值为 0,1,2,3,4. …………………………………………………………………… 6 分

$P(X=0)=\frac{\mathrm{C}_2^2\cdot\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_5^2}=\frac{3}{100}$, $P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_2^2\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_5^2}=\frac{6}{25}$, ……………………………… 8 分

$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_3^2+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_5^2}=\frac{23}{50}$, …………………………………………… 9 分

$P(X=3)=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1+\mathrm{C}_3^1\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_5^2}=\frac{6}{25}$, $P(X=4)=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}^2}{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_5^2}=\frac{3}{100}$. …………………………… 10 分

X 的分布列是：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{3}{100}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{100}$

……………………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=0\times\frac{3}{100}+1\times\frac{6}{25}+2\times\frac{23}{50}+3\times\frac{6}{25}+4\times\frac{3}{100}=2$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$.

因为过$(2,0)\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$两点，故$\begin{cases}4m=1,\\3m+\frac{3}{4}n=1,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{3}$. …………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)假设存在直线 l 满足题意.

(ⅰ)当直线 l 的斜率不存在时，此时 l 的方程为 $x=\pm 1$.

当 $l: x=1$ 时，$A\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $B\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq 0$,

同理可得，当 $l: x=-1$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq 0$. ……………………………………………………… 5 分

(ⅱ)当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+m$，设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

因为直线 l 与圆 O 相切，所以$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $m^2=k^2+1$ ①, …………………………………… 6 分

联立方程组$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$, $\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$,

由根与系数的关系得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2},\\x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ …………………………………………………… 7 分

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$. ………………………………………………………… 8 分

所以 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$,

所以$(1+k^2)\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+km\frac{-8km}{3+4k^2}+m^2=0$,

整理得 $7m^2-12k^2-12=0$ ②,

联立①②，得 $k^2=-1$，此时方程无解. ………………………………………………………… 11 分

由(ⅰ)(ⅱ)可知，不存在直线 l 满足题意. ……………………………………………………

21. 解：(1) $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x}{\ln x}(x>0$ 且 $x\neq 1)$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>e$；令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,1)\cup(1,e)$，…… 3分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(e,+\infty)$；单调递减区间为 $(0,1)$，$(1,e)$. …… 4分

(2) 因为 $f(x)=\frac{x}{\ln x}-ax$，所以 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-a=-(\frac{1}{\ln x})^2+\frac{1}{\ln x}-a=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-a$，

故当 $\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{2}$，即 $x=e^2$ 时，$f'(x)_{\max}=\frac{1}{4}-a$. …… 6分

若存在 $x_1\in[e,e^2]$，使 $f(x_1)\leqslant\frac{1}{4}$ 成立，等价于当 $x\in[e,e^2]$ 时，有 $f(x)_{\min}\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $a\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上为减函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(e^2)=\frac{e^2}{2}-ae^2\leqslant\frac{1}{4}$，故 $a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$. …… 7分

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，由于 $f'(x)=-(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-a$ 在 $[e,e^2]$ 上为增函数，

故 $f'(x)$ 的值域为 $[-a,\frac{1}{4}-a]$. …… 8分

由 $f'(x)$ 的单调性和值域知，

存在唯一 $x_0\in(e,e^2)$，使 $f'(x)=0$，且满足：

当 $x\in[e,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；当 $x\in(x_0,e^2]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{x_0}{\ln x_0}-ax_0\leqslant\frac{1}{4}$，$x_0\in(e,e^2)$.

所以 $a\geqslant\frac{1}{\ln x_0}-\frac{1}{4x_0}>\frac{1}{\ln e^2}-\frac{1}{4e^2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，与 $0<a<\frac{1}{4}$ 矛盾，不合题意. …… 10分

又由(1)知 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上单调递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(e)=\frac{1}{e}>\frac{1}{4}$，不满足题意. …… 11分

综上，得 $a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$. …… 12分

22. 解：(1) 因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$，所以 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，所以 $y^2=4x$.

由 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 消去 t 得 $x+y+4=0$. …… 4分

故曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$，直线 l 的普通方程 $x+y+4=0$. …… 5分

(2) 设曲线 C 上任意一点 $P(\frac{t^2}{4},t)$，则 P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{t^2}{4}+t+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{4}(t+2)^2+3}{\sqrt{2}}$. …… 9分

所以当 $t=-2$ 时，$d_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. …… 10分

23. (1) 解：当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-4x<4$，解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$. …… 2分

当 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2<4$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$. …… 4分

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=4x<4$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$.

综上，$f(x)<4$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$. …… 6分

(2) 证明：由(1)知 $a,b\in\{x|-1<x<1\}$，所以 $|ab+1|>0$，$\frac{|a+b|}{|ab+1|}<1$，要证 $|a+b|<|ab+1|$.

只需证 $(ab+1)^2>(a+b)^2$，即 $a^2b^2+2ab+1>a^2+2ab+b^2$. …… 8分

只需证 $a^2b^2-a^2-b^2+1>0$，即 $(a^2-1)(b^2-1)>0$. …… 9分

由 $|a|<1$，$|b|<1$，得 $(a^2-1)(b^2-1)>0$. 故原不等式成立. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。