百师联盟2021届高三 一轮复习联考(五) 全国卷

文科数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

60 5

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{x|y=\ln(2x-1)\}$，$B=\{x|x<2\}$，则 $A\cap B=$ C

A. $[\frac{1}{2},2)$　B. $(\frac{1}{2},+\infty)$　C. $(\frac{1}{2},2)$　D. $[\frac{1}{2},+\infty)$

2. 已知复数 $z=\frac{3+2i}{i}$（i为虚数单位），则其共轭复数 $\bar{z}=$ B

A. $2+3i$　B. $-2-3i$　C. $2-3i$　D. $-2+3i$

3. 已知条件 $p:x\leq1$，条件 $q:x\leq t$，若 q 是 p 的必要不充分条件，则实数 t 的取值范围是 D

A. $(-\infty,1)$　B. $(-\infty,1]$　C. $[1,+\infty)$　D. $(1,+\infty)$

4. 已知 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，则 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=$ C

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　C. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=15$，则 $|\boldsymbol{b}|=$ C

A. $\sqrt{5}$　B. 2　C. $3\sqrt{5}$　D. 4 A B

6. 11至14世纪出现了一批著名的数学家和数学著作，如秦九韶的《数书九章》，李冶的《测圆海镜》，杨辉的《详解九章算法》，《日用算法》和《杨辉算法》，现从三位数学家的五部专著中任意选择两部作为学生课外兴趣拓展参考书目，则所选的两部中至少有一部不是杨辉著作的概率为 B

A. $\frac{3}{5}$　B. $\frac{7}{10}$　C. $\frac{4}{5}$　D. $\frac{9}{10}$

7. 已知锐角 α,β 满足 $\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{15}{17}$，则 $\sin\alpha=$ D 将所角用已知角表示

A. $-\frac{13}{85}$　B. $\frac{13}{85}$　C. $\frac{36}{85}$　D. $\frac{77}{85}$

$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

8. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，a_4，a_{12} 是函数 $f(x)=x^3-3x^2-2x$ 的两个极值点，则 $S_{15}=$ A .

A. 15　　B. -15　　C. 8　　D. -8

9. 已知直线 $l:x+y+5=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+4x-2y+m=0$ 相交于 A、B 两点，若 $|AB|=2$，则 $m=$ B

A. -5　　B. -4　　C. 3　　D. 5

10. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b=4$，$a^2-ac=b^2-c^2$. 则△ABC 面积的最大值为 C

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$ $f(0)=0$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且 $x\in(0,2]$，$f(x)=x-1$，则函数 $y=f(x)-\sin\frac{\pi}{2}x$ 在 $[-4,4]$ 上的零点个数为 B $x=2$.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

12. 已知球 O 为正四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球（与各个面均相切），若该四棱锥的体积为 36，则球 O 体积的最大值为 B

A. $\frac{9}{4}\pi$　　B. $\frac{9}{2}\pi$　　C. 3π　　D. 9π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ x-2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=-3x+y$ 的最大值为 1 .

14. 二项式 $(\frac{2}{x^2}-\sqrt{x})^5$ 的展开式中的常数项为______.

15. 某大型工业加工厂为响应国家节能、减少污染的号召，启动新型环保生产模式，特投资 64 万元引进新生产设备，第一年用于该设备的各种保养维修费用为 10 万元，以后每年增加 2 万元，每年的销售利润为 50 万元，则年平均利润的最大值为 30 万元.

16. 已知圆 $M:(x-2)^2+(y-2\sqrt{2})^2=1$ 的圆心 M 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，设抛物线 C 的焦点为 F，直线 MF 与抛物线 C 的另一个交点为 N，则 $|MN|=$ $(\frac{1}{2},2)$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。 (2.

17. （12 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$，公比 $q>0$，记 S_n 为其前 n 项和，$-S_1,S_2,S_3$ 成等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\cdot\log_2a_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12分）

某高校计划组建一个表演社团，现面向全校大学生进行公开招募。申请加入社团的大学生必须表演规定节目，由专家决定该生是否适合加入该社团．假设各个学生表演节目相互独立.

（1）某寝室5个人均去参加招募活动，其中有3人被社团录取．那么，从这5人中任选两人，求这2人恰好有一人被社团录取的概率；

（2）若该社团随机抽查了来自数学和英语专业参与招募的共计30人，抽检结果如下表所示：

	录取	淘汰	合计
数学	15	5	
英语	5		
合计			

将表格补充完整，并通过计算判断是否有99%的把握认为社团录取与否与专业有关？

参考公式及数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$）

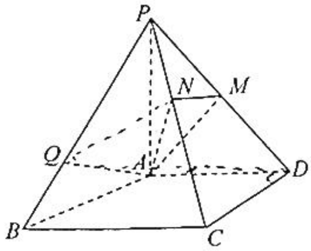
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

12 19.（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD/\!/BC$，$AD=\dfrac{2}{3}BC$，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，$M$、$N$、$Q$ 分别在 PD、PC、PB 上，且满足 $PD=2PM$，$PC=3PN$，$PB=3QB$.

（1）证明：$AM\perp$ 平面 PCD；

（2）判断直线 AQ 是否在平面 AMN 内，并说明理由.



20.（12 分）

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 4，点 $M(\sqrt{2},\sqrt{3})$在椭圆上．过原点的两条直线 l_1 和 l_2 与椭圆分别交于 A、B 和 C、D 四个点，且直线 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$．

（1）求椭圆的标准方程；　$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$

（2）求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$的最大值．

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x$．

（1）若 $a=-1$，求函数 $f(x)$的极值；　$\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

（2）设 $f'(x)$是 $f(x)$的导函数，若 x_1,x_2 是函数 $f'(x)$的两个不相等的零点，求证：$f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-1$．

（二）选考题：10 分。请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多答，则按所答第一题评分。

22.【选修 4－4：坐标系与参数方程】（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(-2,2)$，点 N 为曲线 $C_1:(x-2)^2+y^2=4$ 上的动点，点 T 为线段 MN 的中点，设点 T 的轨迹为曲线 C_2．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求 C_2 的极坐标方程；　$\rho=2\sin a.$

（2）若过点 $P(1,0)$的直线 l 与曲线 C_2 相交于 A，B 两点，求$|PA|\cdot|PB|$的值．

1

23.【选修 4－5：不等式选讲】（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|+2|x-3|$．

（1）若不等式 $f(x)\geq m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，若 a，b，c 为正实数，且三数之和为 m 的最大值，求证：$a^2+b^2+c^2\geq\frac{25}{3}$．

百师联盟 2021 届高三 一轮复习联考(五) 全国卷 I

文科数学参考答案及评分意见

1. C 【解析】因为 $B=\{x\mid 0<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid x>0\}$. 故选 C.

2. C 【解析】$z=(1+2i)(2+i)=5i$，所以 $|z|=5$. 故选 C.

3. B 【解析】$a_2a_8+2a_3a_9+a_7^2=a_5^2+2a_5a_7+a_7^2=(a_5+a_7)^2=16$，因为等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为负数，所以 $a_5+a_7=-4$，故选 B.

4. A 【解析】函数的定义域为 R，$f(x)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，排除 D，又由 $f(0)=-1$，$f(2)>0$，故选 A.

5. A 【解析】由题可知 $PA\perp BD$，充分性：若 $ABCD$ 为正方形，则 $AC\perp BD$，即可得 $BD\perp$ 平面 PAC，成立；必要性：若 $BD\perp$ 平面 PAC，则 $BD\perp AC$，即 $ABCD$ 为对角线相互垂直的四边形，即必要性不成立. 所以四边形 $ABCD$ 为正方形是 $BD\perp$ 平面 PAC 成立的充分不必要条件.

6. C 【解析】$f'(x)=-3x^2+6x-1=-3(x-1)^2+2$，所以切线斜率的最大值为 $f'(1)=2$，而 $f(1)=-1$，此时切线方程为 $2x-y-3=0$. 故选 C.

7. B 【解析】由题意，5 部专著中有 3 部是杨辉所著，编号为 a,b,c，另外两本分别编号为 x,y，现从这 5 部专著中选择 2 部的基本事件有 $(a,b),(a,c),(a,x),(a,y),(b,c),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y),(x,y)$，共 10 个，所选 2 部专著至少有一部不是杨辉著作包含的基本事件有 $(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y),(x,y)$ 共 7 个，则所选 2 部专著中至少有一部不是杨辉著作的概率为 $p=\frac{7}{10}$. 故选 B.

8. D 【解析】$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2=2-4+\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{1}{2}=-1$，故选 D.

9. B 【解析】由题易知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 最小正周期 T 相同，若 $f(x)$ 的所有对称中心与 $g(x)$ 的所有对称中心重合，即可得 $\frac{\pi}{6}$ 为 $\frac{T}{2}$ 的整数倍，即 $\frac{\pi}{6}=k\cdot\frac{T}{2}=k\cdot\frac{\pi}{\omega}$，即 $\omega=6k(k\in Z)$，所以 ω 的最小值为 6. 故选 B.

10. B 【解析】因为 $2^{\frac{1}{2}}>1$，$5^{\frac{1}{5}}>1$，$0<\log_3 2<1$，$(2^{\frac{1}{2}})^{10}=2^5=32$，$(5^{\frac{1}{5}})^{10}=5^2=25$，所以 $2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}>\log_3 2$，$\frac{f(x)}{x}$ 表示点 $(x,f(x))$ 和原点连线的斜率，结合函数 $f(x)=2^x-1$ 的图象特征可知 $c<b<a$. 故选 B.

11. C 【解析】圆 $M:(x-2)^2+(y-2\sqrt{2})^2=1$，圆心 $M(2,2\sqrt{2})$ 在 $C:y^2=2px$ 上，所以 $p=2$，

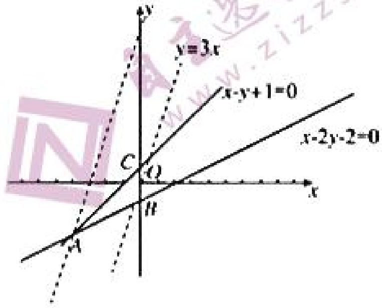
焦点 $F(1,0)$，$k_{MF}=\frac{2\sqrt{2}}{2-1}=2\sqrt{2}$，则直线 $MF:y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$，

联立直线与抛物线方程：$\begin{cases}y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\\y^2=4x\end{cases}$，整理得 $2x^2-5x+2=0$，

由题意 $\Delta>0$，设其两根为 x_1,x_2，弦长 $|MN|=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$. 故选 C.

12. B 【解析】由 $f(x+2)=f(2-x)$ 可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x=2$，由 $(x-2)f'(x)<0$ 可知函数 $f(x)$ 的图象在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，则可知 $f(0)=f(4)$，且 $f(0)<f(2)$，$f(4)<f(2)$，即 $f(0)+f(4)<2f(2)$，所以②④正确，故选 B.

13. 9 【解析】不等式组表示的可行域如图所示：



$B(0,-1)$，$C(0,1)$，$\begin{cases}x-2y-2=0\\x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}$，$A(-4,-3)$.

由 $z=y-3x$ 得到 $y=3x+z$，z 表示直线 $y=3x+z$ 的 y 轴截距.

当直线 $y=3x+z$ 过 $A(-4,-3)$ 时，z 取得最大值，$z_{\max}=-3-3\times(-4)=9$.

14. 2 【解析】依题设，$|F_1F_2|=2c$，$|MF_1|=4c$，$|MF_2|=4c+2a$，则在 $\triangle MF_1F_2$ 中由余弦定理得，

所以 $(4c+2a)^2=4c^2+16c^2-2\times2c\times4c\times\left(-\dfrac{5}{16}\right)$，即 $9c^2-16ac-4a^2=0$，所以 $9e^2-16e-4=0$，解得 $e=2$ 或 $-\dfrac{2}{9}$（舍）.

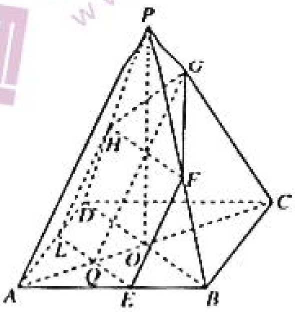
15. $\dfrac{n}{2}$，105 【解析】$\begin{cases}2a_n^2+a_n=2S_n\\2a_{n+1}^2+a_{n+1}=2S_{n+1}\end{cases}$，两式作差得 $(a_{n+1}+a_n)(2a_{n+1}-2a_n-1)=0$，

又数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $2a_{n+1}-2a_n-1=0$，即 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}$.

当 $n=1$ 时，有 $2a_1^2+a_1=2S_1=2a_1$，得 $a_1\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)=0$，则 $a_1=\dfrac{1}{2}$，

故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{2}$ 公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列，所以 $a_n=\dfrac{n}{2}$，$S_n=\dfrac{n^2+n}{4}$，即 $S_{20}=\dfrac{20^2+20}{4}=105$.

16. $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ 【解析】如图，过 Q 作 $EL\,/\!/\,BD$，交 AB 于点 E，交 AD 于点 L，则 E、L 分别为中点，过 Q 作 $QG\,/\!/\,PA$，交 PC 于点 G，则 G 为 PC 上靠近 P 点的四等分点. 再过点 E 作 $EF\,/\!/\,PA$，交 PB 于点 F，过点 L 作 $HL\,/\!/\,PA$ 交 PD 于点 H，则 F、H 分别为中点. 连接 FG，GH，FH，所以 $EF\,/\!/\,PA$，$HL\,/\!/\,PA$，$GQ\,/\!/\,PA$，所以 $EF\,/\!/\,HL\,/\!/\,GQ$，所以 E，F，G，H，L 共面，$Q\in$ 平面 $EFGHL$，因为 $EL\,/\!/\,BD$，$EL\subset$ 平面 $EFGHL$，所以 $BD\,/\!/$ 平面 $EFGHL$，同理 $PA\,/\!/$ 平面 $EFGHL$. 所以过 Q 且与 PA，BD 都平行的截面为多边形 $EFGHL$.



易得截面 $EFGHL$ 是由两个全等的直角梯形组成，$PA=\sqrt{PO^2+OA^2}=2\sqrt{5}$，所以 $EF=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{5}$，同理得，$QG=\dfrac{3}{4}PA=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，$QE=1$，

所以截面 $EFGHL$ 的面积 $S=(EF+QG)QE=\left(\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\cdot 1=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

17.【解析】(1)因为 $(a-c)\sin A=(b-c)(\sin B+\sin C)$,

由正弦定理可得 $a^2-ac=b^2-c^2$,即 $a^2+c^2-b^2=ac$,

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,

又因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 5 分

(2)由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

所以 $a+b+c=\frac{8\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)+4=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]+4$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A\right]+4$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+4$

$=8\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+4$

因为 $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$

所以 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$

所以 $a+b+c\in(8,12]$

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 12. …………………………………… 12 分

18. 解:(1)将被社团录取的 3 人编号为 a,b,c,未被录取的 2 人编号为 m,n.从 5 人随机抽取 2 人,有 $(a,b),(a,c),(a,m),(a,n),(b,c),(b,m),(b,n),(c,m),(c,n),(m,n)$,共有 10 种不同的抽取方式. …………………………………… 2 分

其中这 2 人恰好有一人被社团录取有 $(a,m),(a,n),(b,m),(b,n),(c,m),(c,n)$,共 6 种不同的抽取方式。 …………………………………… 4 分

所以,这 2 人恰好有一人被社团录取的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …………………… 6 分

(2)由题将表格补充完整得

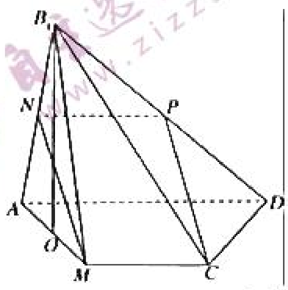
	录取	淘汰	合计
数学	15	5	20
英语	5	5	10
合计	20	10	30

…………………………………………………………………………………………… 8 分

则 K^2 的观测值 $k=\dfrac{30\times(15\times5-5\times5)^2}{20\times10\times20\times10}=1.875<6.635$. ……………………………… 11 分

所以没有 99% 的把握认为社团录取与否与专业有关. ……………………………… 12 分

19.【解析】(1)取 B_1D 的中点 P,连接 PC、NP,因为 N 是 AB_1 的中点,所以 $NP/\!/AD$, $NP=\dfrac{1}{2}AD$,



又因为 M 是 BC 的中点,所以 $MC/\!/AD$, $MC=\dfrac{1}{2}AD$,

所以 $NP/\!/MC$, $NP=MC$,所以四边形 $MCPN$ 是平行四边形,所以 $MN/\!/PC$,

又因为 $MN\not\subset$ 平面 B_1CD, $PC\subset$ 平面 B_1CD,

所以 $MN/\!/$ 平面 B_1CD; ……………………………………………… 5 分

(2)取 AM 的中点 O,连接 B_1O,

因为 $BC=2AB=12$, $\angle ABC=60°$,

所以 $\triangle AB_1M$ 是边长为 6 的正三角形,且 $B_1O\perp AM$, $B_1O=3\sqrt{3}$

又因为平面 $B_1AM\perp$ 平面 $AMCD$,平面 $B_1AM\cap$ 平面 $AMCD=AM$,

所以 $B_1O\perp$ 平面 $AMCD$.

所以四棱锥 B_1-AMCD 的高为 $B_1O=3\sqrt{3}$,

而四边形 $AMCD$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times(12+6)=27\sqrt{3}$.

所以四棱锥 B_1-AMCD 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times27\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=81$. ……………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意 $\begin{cases}2c=4\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得 $a^2=8$, $b^2=4$,

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………… 5 分

(2)当直线 AB 的斜率不存在时,设 $A(x_0,y_0)$,则 $B(x_0,-y_0)$,

有 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{y_0^2}{x_0^2}=-\dfrac{1}{2}$,

又 $\dfrac{x_0^2}{8}+\dfrac{y_0^2}{4}=1$,可得 $x_0^2=4$, $y_0^2=2$.

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_0^2-y_0^2=2$.

当直线 AB 的斜率存在时,设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$,再设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ x^2+2y^2=8\end{cases}$,得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$.

$\Delta=(4km)^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$ ①

$x_1+x_2=\dfrac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}$，

因为 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $y_1y_2=-\dfrac{1}{2}x_1x_2=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}=-\dfrac{m^2-4}{1+2k^2}$，

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=k^2\cdot\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}+km\cdot\dfrac{-4km}{1+2k^2}+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$，

所以 $-\dfrac{m^2-4}{1+2k^2}=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$，得 $4k^2+2=m^2$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}-\dfrac{m^2-4}{1+2k^2}=\dfrac{m^2-4}{1+2k^2}=2-\dfrac{4}{1+2k^2}<2$

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最大值为 2. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)=\ln x-x^2-x$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x-1=-\dfrac{2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x<\dfrac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}$.

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln2-\dfrac{3}{4}$.

综上可知，函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln2-\dfrac{3}{4}$，无极小值. ………………………… 5 分

(2)依题意，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-1$，所以 x_1,x_2 是 $2ax^2-x+1=0$ 的两个不相等的正实数解；

则 $\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=1-8a>0\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}>0\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2a}>0\end{cases}$，解得 $0<a<\dfrac{1}{8}$.

$f(x_1)+f(x_2)-x_1-x_2=\ln x_1+\ln x_2+ax_1^2+ax_2^2-2(x_1+x_2)=a(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{3}{4a}-1$.

令 $t=\frac{1}{2a}$，$g(t)=\ln t-\frac{3t}{2}-1$，$t\in(4,+\infty)$，

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{3}{2}=\frac{2-3t}{2t}<0$，所以 $g(t)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(t)<g(4)=\ln4-7<2-7=-5$.

即 $f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-5$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)设点 T 的坐标为 (x,y)，点 N 的坐标为 (m,n)，则 $(m-2)^2+n^2=4$.

由 T 为 MN 的中点，有 $\begin{cases}2x=m-2\\2y=n+2\end{cases}$，得 $\begin{cases}m=2x+2\\n=2y-2\end{cases}$，代入 $(m-2)^2+n^2=4$，得 $4x^2+(2y-2)^2=4$.

整理得 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.

将 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x^2+(y-1)^2=1$

得 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$. ………………………………………………………… 5 分

(2)设直线 l 的倾斜角为 θ，则直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\theta\\y=t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数），

A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2.

将直线 l 的参数方程代曲线 C_2 的直角坐标方程后整理为 $t^2+2(\cos\theta-\sin\theta)t+1=0$，

得 $t_1+t_2=-2(\cos\theta-\sin\theta)$，$t_1\cdot t_2=1$，

所以 $|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=1$.

所以 $|PA|\cdot|PB|$ 的值为 1. ………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1)由(1)可知 $f(x)=\begin{cases}-3x+4,x\leqslant-2\\8-x,-2<x<3\\3x-4,x\geqslant3\end{cases}$.

当 $x\leqslant-2$ 时，$f(x)=-3x+4\geqslant10$；

当 $-2<x<3$ 时，$f(x)=8-x\in(5,10)$；

当 $x\geqslant3$ 时，$f(x)=3x-4\geqslant5$.

所以函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[5,+\infty)$，

若不等式 $f(x)\geqslant m$ 恒成立，则 $m\leqslant5$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $a+b+c=5$.

由柯西不等式可得 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$，即 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant5^2$，

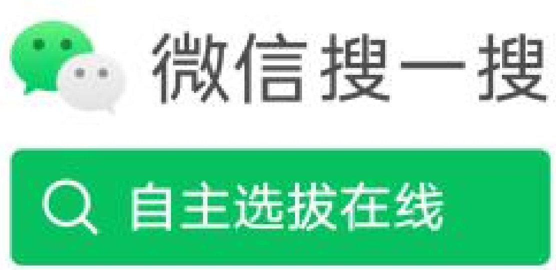
即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{25}{3}$，当且仅当 $a=b=c=\frac{5}{3}$ 时，等号成立.

因此，$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{25}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》