1号卷·A10联盟20

理科数

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学 天长中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x<2\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x^2+2x-8\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 的真子集个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

2. 若纯虚数 z 满足 $z\cdot(2-3\mathrm{i})=5+m\mathrm{i}$，则实数 m 的值为（　　）

A. $-\dfrac{15}{2}$　　B. $\dfrac{15}{2}$　　C. $-\dfrac{10}{3}$　　D. $\dfrac{10}{3}$

3. “共享单车，绿色出行”是近年来火爆的广告词，现对某市10名共享单车用户一个月内使用共享单车的次数进行统计，得到数据如下所示，下列关于该组数据的说法错误的是（　　）

1	7			
2	3	5	6	7
3	2	4	4	
4	9			
5	3			

A. 极差为36　　B. 众数为34

C. 中位数为27　　D. 平均数为32

4. “$m<4$”是“函数 $f(x)=2x^2-mx+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若 $\sin\alpha(2-\cos^2\alpha)=2\cos\alpha(\sin^2\alpha+1)$，则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)=$（　　）

A. -7　　B. 7　　C. $-\dfrac{1}{7}$　　D. $\dfrac{1}{7}$

021届高三开年考
数学

中学 屯溪一中 宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

两部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

6. 已知 $x=3^{\frac{1}{2}}$，$y=0.5^{0.3}$，$z=\log_{0.2}0.5$，则（　　）

A. $y<z<x$　　B. $x<z<y$

C. $y<x<z$　　D. $z<y<x$

7. 已知抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 P 作 $PQ\perp l$，垂足为 Q，若 $|PF|=4$，则 $\angle FQP=$（　　）

A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 75°

8. 2020年是全面建成小康社会的目标实现之年，也是全面打赢脱贫攻坚战的收官之年．为更好地将“精准扶贫”落到实处，某地安排7名干部（3男4女）到三个贫困村调研走访，每个村安排男、女干部各1名，剩下1名干部负责统筹协调，则不同的安排方案有（　　）

A. 72种　B. 108种　C. 144种　D. 210种

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 P 在棱 AD 上，过点 P 作该正方体的截面，当截面平行于平面 B_1D_1C 且面积为 $\sqrt{3}$ 时，线段 AP 的长为（　　）

A. $\sqrt{2}$　B. 1　C. $\sqrt{3}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

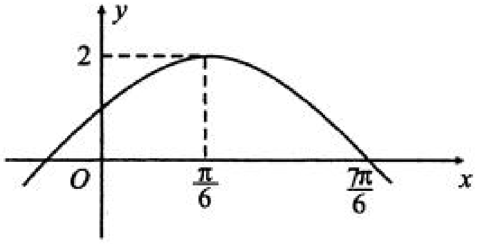
10. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：①图象关于原点对称；② $f(x)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)$；③当 $x\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)+m$．若 $f(2020)=\log_2 3$，则 $m=$（　　）

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

11. 将函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到的部分图象如图所示，有下列四个结论：

① $f(0)=1$；② $y=f(x)-\sqrt{3}$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点；③ $f(x)$

的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称；④ $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$ 上单调递减，其中所有正确结论的个数为（　　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 的直线 l 与 C 的两支分别交于点 A,B，若点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，$\left|\overrightarrow{MF_2}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|=2a$，则双曲线 C 的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$

C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm 2x$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-3y\geqslant 0\\x+y\leqslant 4\\y+1\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x-y$ 的最大值为______.

14. 若平面向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=3$，且 $|3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}|=6$，则 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角的大小为__________.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $c\sin A+\sqrt{3}a\sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$，$c=\sqrt{3}b=6$，且点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则 CM 的长为_________.

16. 在正三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=BC=CA=6$，点 D 是 SA 的中点，若 $SB\perp CD$，则该三棱锥外接球的表面积为________

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

已知首项为 4 的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且

$$\frac{S_{n+1}}{3}=\frac{S_n+2a_n}{3}+2^{n+1}.$$

（Ⅰ）求证：数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

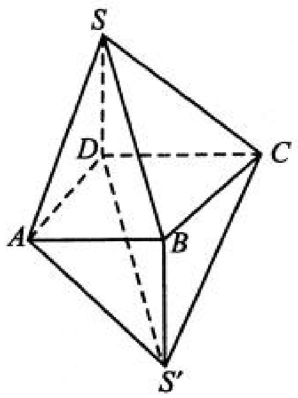
（Ⅱ）若$b_n=a_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分 12 分）

已知多面体$SABCDS'$如图所示，四边形$ABCD$为梯形，$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$SD\perp$平面$ABCD$，$SD\parallel S'B$，$AB=SD=\frac{\sqrt{2}}{2}S'A=3$，$AD=CD=4$.

（Ⅰ）求证：$DS'\parallel$平面BCS；

（Ⅱ）求平面ABS'与平面CDS'所成锐二面角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

某高校为了加快打造一流名校步伐，生源质量不断改善．据统计，该校 2014 年到 2020 年所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数 y 与对应年份代号 x 的数据如下：

年份	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
不低于 600 分的人数 y（单位：人）	29	33	36	44	48	52	59

（Ⅰ）若 y 关于 x 具有较强的线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测 2021 年该校所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数；

（Ⅱ）今有 A，B，C，D 四位同学报考该校，已知 A，B，C 被录取的概率均为 $\frac{1}{3}$，D 被录取的概率为 $\frac{1}{2}$，且每位同学是否被录取相互不受影响，用 X 表示此 4 人中被录取的人数，求 X 的分布列与数学期望．

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=301$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=140$．

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $P\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$（$m\neq 0$ 且 $m\neq -\sqrt{3}$）交椭圆 C 于 A,B 两点，记直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，探究：k_1k_2 是否为定值，若是，求出该值；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-m)^{\frac{1}{2}}-\sin x$，其中 $m<-\frac{1}{4}$.

（Ⅰ）当 $m=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一极小值点.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答．注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号．

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\alpha \\ y=\sqrt{3}+\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\theta_0$（$\rho\in\mathbf{R}$）．

（Ⅰ）求曲线 C 的极坐标方程；

（Ⅱ）当 $\theta_0\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，设直线 l 与曲线 C 相交于 M,N 两点，求 $|OM|+|ON|$ 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\log_2\left(|2x-1|+|x-4|-m\right)(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求 m 的取值集合 M；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，正数 a,b 满足 $a,b\in M$，求证：$\dfrac{a+b}{4ab+49}<\dfrac{1}{14}$.

1号卷·A10联盟2021届高三开年考
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	A	D	B	C	A	B	C	B

1. A　由题意得，$B=\left\{x\in\mathbf{N}\mid(x-2)(x+4)\leqslant 0\right\}=\{0,1,2\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1\}$，$\therefore A\cap B$ 的真子集个数为 $2^2-1=3$，故选 A.

2. D　由题意得，$z=\dfrac{5+mi}{2-3i}=\dfrac{(5+mi)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{10-3m}{13}+\dfrac{15+2m}{13}i$，则 $\begin{cases}10-3m=0\\15+2m\neq 0\end{cases}$，解得 $m=\dfrac{10}{3}$，故选 D.

3. C　该组数据的极差为 36，众数为 34，中位数为 29.5，平均数为 $30+\dfrac{1}{10}\times(-13-7-5-4-3+2+4+4+19+23)=32$，观察选项可知，故选 C.

4. A　若 $f(x)=2x^2-mx+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=4x-m+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即 $4x+\dfrac{1}{x}\geqslant m$，则 $m\leqslant 4$，故选 A.

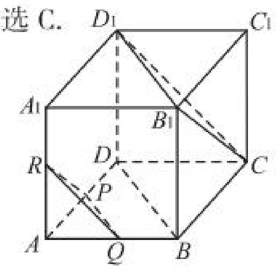
5. A　由题意得，$\tan\alpha=2$，$\therefore \tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$，$\therefore \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)=\dfrac{1-\tan 2\alpha}{1+\tan 2\alpha}=-7$. 故选 A.

6. D　$\because x=\sqrt{3}>1$，$0.5<y=0.5^{0.3}<0.5^0=1$，$z=\log_{0.2}0.5=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=0.5$，$\therefore z<y<x$，故选 D.

7. B　由题意得，$F(0,2)$，$|PQ|=|PF|=y_P+2=4$，$\therefore y_P=2$，$\therefore x_P=\pm 4$，$\therefore FP\perp PQ$，$\therefore\triangle PFQ$ 是等腰直角三角形，$\therefore\angle FQP=45^\circ$. 故选 B.

8. C　$\because$ 每个村男、女干部各 1 名，$\therefore$ 可先安排男干部，共 $A_3^3=6$ 种，再安排女干部，共有 $C_4^3A_3^3=24$ 种，$\therefore$ 共有 $6\times 24=144$ 种不同的安排方案，故选 C.

9. A　如图，过点 P 作 D_1B_1, B_1C 的平行线，分别交棱 AB, AA_1 于点 Q, R，连接 QR, BD，易知 $\triangle PQR$ 是等边三角形，且为截面，则 $\dfrac{1}{2}PQ^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，解得 $PQ=2$，



$\therefore AP=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=\sqrt{2}$．故选 A.

10. B　由题意得，$f(x)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)=-f\left(x-\frac{3}{2}\right)$，故 $f(3+x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的周期为 3，$\therefore f(2020)=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{3}{2}+m=\log_2 3$，解得 $m=1$，故选 B.

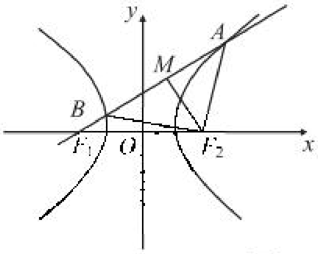
11. C　$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得 $g(x)=2\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，由图象知 $g(x)$ 的周期 T 满足 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$，$\therefore T=4\pi$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$，又 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$．又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f(0)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$．令 $f(x)-\sqrt{3}=0$，则 $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $x\in[0,\pi]$，$\therefore \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 或 π，$\therefore y=f(x)-\sqrt{3}$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点.令 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore f(x)$ 的图象不关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称．令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $4k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right]$，令 $k=0$，得 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$ 上单调递减，综上所述，①②④正确，故选 C.

12. B　不妨设 A 在 B 的右侧，作出示意图如图，由题意得，$|AB|=4a$，$\angle AF_2B=90^\circ$．根据双曲线的定义得 $AF_1-AF_2=2a$，$BF_2-BF_1=2a$，则 $BF_2=BF_1+2a$，且有 $AF_1=AB+BF_1=4a+BF_1$，代入可得 $AF_2=2a+BF_1$，则 $BF_2=AF_2$，$\because \angle AF_2B=90^\circ$，则 $\angle ABF_2=\angle BAF_2=45^\circ$，且 $AB^2=AF_2{}^2+BF_2{}^2$，则 $BF_2=AF_2=2\sqrt{2}a$，则 $BF_1=\left(2\sqrt{2}-2\right)a$.

在$\triangle BF_1F_2$中，$\angle F_1BF_2=135°$，

则$\cos135°=\dfrac{BF_1^2+BF_2^2-F_1F_2^2}{2BF_1\cdot BF_2}$，

即$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{(20-8\sqrt{2})a^2-4c^2}{(16-8\sqrt{2})a^2}$，

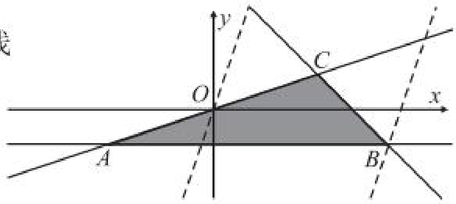


整理可得，$c=\sqrt{3}a$，$\therefore b=\sqrt{2}a$，故渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$. 故选 B.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. 16

作出不等式组所表示的平面区域如图所示，当直线$z=3x-y$过点$B(5,-1)$时，z取得最大值16.



14. 60°（或填$\dfrac{\pi}{3}$）

由题意得，$|3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}|^2=9\boldsymbol{m}^2-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+4\boldsymbol{n}^2=36$，即

$36=36-12\times2\times3\times\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>+36$，则$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{1}{2}$，故$<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=60°$.

15. 2

$\because c\sin A+\sqrt{3}a\sin\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$\therefore c\sin A+\sqrt{3}a\cos C=0$，$\therefore \sin C\sin A+$

$\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，又$\sin A\neq0$，$\therefore\tan C=-\sqrt{3}$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$.

由正弦定理得，$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{b\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}b}=\dfrac{1}{2}$，$\because 0<B<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A=\pi-B-$

$C=\dfrac{\pi}{6}$. 在$\triangle ACM$中，由余弦定理得，$CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos A$，

即$CM^2=2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$CM=2$.

16. 54π

设$\triangle ABC$的中心为G，连接SG,BG，$\therefore SG\perp$平面ABC，$\therefore SG\perp AC$，又$AC\perp GB$，$\therefore AC\perp$平面SBG，$\therefore AC\perp BS$，又$BS\perp CD$，故$BS\perp$平面ACS，又$S-ABC$为正三棱锥，$\therefore SA$、SB、SC两两垂直，故外接球直径为$3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$，故三棱锥$S-ABC$外接球的表面积为$54\pi$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$a_{n+1}=2a_n+3\cdot2^{n+1}$，$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=3$，……………………2 分

故数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$是以2为首项，3为公差的等差数列，……………………4分

$\therefore \dfrac{a_n}{2^n}=2+3(n-1)=3n-1$，$\therefore a_n=(3n-1)\cdot 2^n$. ……………………6分

（Ⅱ）由题意得，$b_n=a_{n+1}=(3n+2)\cdot 2^{n+1}$.

故$T_n=5\times 2^2+8\times 2^3+11\times 2^4+\cdots+(3n+2)\cdot 2^{n+1}$，

$2T_n=5\times 2^3+8\times 2^4+11\times 2^5+\cdots+(3n+2)\cdot 2^{n+2}$，

$\therefore -T_n=5\times 2^2+3\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+3\cdot 2^{n+1}-(3n+2)\cdot 2^{n+2}$

$=3\times 2^2+3\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+3\cdot 2^{n+1}-(3n+2)\cdot 2^{n+2}+8$

$=(1-3n)\cdot 2^{n+2}-4$，……………………11分

解得$T_n=(3n-1)\cdot 2^{n+2}+4$. ……………………12分

18.（本小题满分12分）

（Ⅰ）$\because SD\perp$平面$ABCD$，$SD\parallel S'B$，$\therefore S'B\perp$平面$ABCD$，

$\therefore S'B\perp AB$，$\therefore S'B=\sqrt{S'A^2-AB^2}=3$，$\therefore BS'=DS$，

$\therefore$四边形$BSDS'$为平行四边形，$\therefore DS'\parallel BS$，……………………4分

又$DS'\not\subset$平面BCS，$BS\subset$平面BCS，$\therefore DS'\parallel$平面BCS. ………………5分

（Ⅱ）以D为原点，DA,DC,DS所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系，则$D(0,0,0)$，$S'(4,3,-3)$，$C(0,4,0)$，$\therefore \overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{DS'}=(4,3,-3)$.

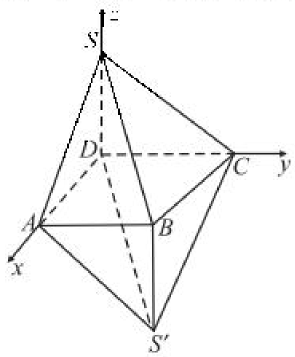
设平面CDS'的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DS'}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}4y=0\\ 4x+3y-3z=0\end{cases}$，得$\boldsymbol{n}=(3,0,4)$. ……………………8分

又易知平面ABS'的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ……………………9分

设平面ABS'与平面CDS'所成锐二面角为θ，则$|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{3}{5}$，

即平面ABS'与平面CDS'所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$. ……………………12分



19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）根据表中数据，计算可得 $\overline{x}=4$， $\overline{y}=43$， $\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=28$， ………………2 分

又 $\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=140$，

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{140}{28}=5，则 \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=43-5\times4=23，$$

$\therefore y$ 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=5x+23$， ……………………4 分

令 $x=8$，可得 $\hat{y}=5\times8+23=63$，

即该高校 2021 年所招的学生高考成绩不低于 600 分的人数预测值为 63 人. ……5 分

（Ⅱ）由条件可知，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，

$$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}，$$

$$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{10}{27}，$$

$$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}，$$

$$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{54}，$$

$$P(X=4)=C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{54}，$$ ……………………10 分

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{54}$	$\frac{1}{54}$

$$\therefore E(X)=0\times\frac{4}{27}+1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{7}{54}+4\times\frac{1}{54}=\frac{3}{2}.$$ ……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………4分

（Ⅱ）联立$\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，解得$x^2-\sqrt{3}mx+m^2-1=0$，

其中$\Delta=3m^2-4\left(m^2-1\right)=-m^2+4>0$，解得$-2<m<2$，

又$m\neq0$且$m\neq-\sqrt{3}$，$\therefore m$的取值范围是$\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,2\right)$. ………6分

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则$x_1+x_2=\sqrt{3}m$，$x_1x_2=m^2-1$，

$$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}x_1x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\left(m^2-1\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}m+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{m^2-1+\sqrt{3}m+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}m^2+\frac{\sqrt{3}}{4}m}{m^2+\sqrt{3}m}=\frac{1}{4}，$$ ……………………11分

即k_1k_2是定值，且定值是$\dfrac{1}{4}$. ……………………12分

21.（本小题满分12分）

（Ⅰ）当$m=-1$时，$f(x)=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}-\sin x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\cos x$，

$\therefore f'(0)=-\dfrac{1}{2}$，又$f(0)=1$，

$\therefore$所求切线方程为$y-1=-\dfrac{1}{2}x$，即$x+2y-2=0$. ………………4分

（Ⅱ）由题意得，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-m}}-\cos x$.

令$g(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-m}}-\cos x$，则$g'(x)=-\dfrac{1}{4\left(x-m\right)^{\frac{3}{2}}}+\sin x$，

$\because m<-\frac{1}{4}$，$\therefore g'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增. ……………………6 分

又$g'(0)<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{4\left(\frac{\pi}{2}-m\right)^{\frac{3}{2}}}>0$，$\therefore$存在唯一实数$t_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

使得$g'(t_0)=0$，则当$x\in(0,t_0)$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减；

当$x\in\left(t_0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增. ……………………8 分

又$m<-\frac{1}{4}$，则$-m>\frac{1}{4}$，即$\sqrt{-m}>\frac{1}{2}$，即$2\sqrt{-m}>1$，

$\therefore g(0)=\frac{1}{2\sqrt{-m}}-1<0$，$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{3}-m}}-\frac{1}{2}<0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}-m}}>0$，

$\therefore$存在唯一实数$x_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，使得$g(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0-m}}-\cos x_0=0$，………10 分

$\therefore$当$x\in(0,x_0)$时，$f'(x)=g(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)=g(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有唯一极小值点$x_0$. ……………………12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）$\because$曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），

消去α，得$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1$，即$x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y+3=0$，

将$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入上式，得$\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$，

即为曲线C的极坐标方程. ……………………5 分

（Ⅱ）将$\theta=\theta_0$代入曲线C的极坐标方程，

得$\rho^2-2\rho\cos\theta_0-2\sqrt{3}\rho\sin\theta_0+3=0$. ……………………6 分

设$M(\rho_1,\theta_0)$，$N(\rho_2,\theta_0)$，则$\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0$，………………7 分

$\therefore |OM|+|ON|=\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0=4\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)$. ……………8 分

$\because \theta_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \theta_0 + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore 4\sin\left(\theta_0 + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(2\sqrt{3}, 4\right]$，

即$|OM| + |ON|$的取值范围为$\left(2\sqrt{3}, 4\right]$. ……………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

（Ⅰ）$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore |2x-1| + |x-4| - m > 0$，即 $m < |2x-1| + |x-4|$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立.

设 $g(x) = |2x-1| + |x-4|$，则 $g(x) = \begin{cases} -3x+5, x < \frac{1}{2} \\ x+3, \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4 \\ 3x-5, x > 4 \end{cases}$，

结合函数 $g(x)$ 的图象可知 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$，

$\therefore m < \frac{7}{2}$，即集合 $M = \left\{m \middle| m < \frac{7}{2}\right\}$. ……………………5 分

（Ⅱ）由题意得，$0 < a < \frac{7}{2}$，$0 < b < \frac{7}{2}$，要证 $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$，

即证 $4ab + 49 > 14(a+b)$，即证 $4ab + 49 - 14(a+b) > 0$，

即证 $(2a-7)(2b-7) > 0$，……………8 分

又 $0 < a < \frac{7}{2}$，$0 < b < \frac{7}{2}$，$\therefore (2a-7)(2b-7) > 0$，

故 $\frac{a+b}{4ab+49} < \frac{1}{14}$ 得证. ……………………10 分