绝密★启用前

2022—2023 学年高三总复习阶段性检测考试
数学文科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,2,4\}$，$B=\{x\mid -2<\frac{x}{2}-1<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1\}$　B. $\{-1,2\}$　C. $\{2,4\}$　D. $\{-1,2,4\}$

2. $\sin 660°\cos 900°$的值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. 0　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $-\frac{1}{4}$

4. 香农公式是通信界著名的公式，可以与勾股定理、欧拉公式及爱因斯坦的质能公式相媲美，其公式为 $C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，其中 C 代表传输通道可传送的最大信息速率，W 代表传输通道的带宽，$\frac{S}{N}$代表接收信号的信噪比，根据该公式，若带宽 W 提高到原来的 5 倍，信噪比$\frac{S}{N}$由 1 000 提高到 2 000，C 提高到原来的 m 倍，则 m 的值最接近（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 10　B. 5.5　C. 5　D. 4.5

5. 函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为

A. $2x-y-3=0$　B. $2x-y+3=0$　C. $2x+y-3=0$　D. $2x+y+3=0$

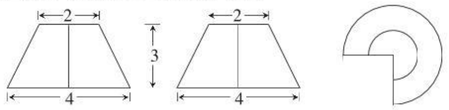
6. 某旅游短视频博主计划从 A,B,C,D,E,F 这 6 个旅游小镇中选 4 个去打卡，则 A,B 两镇恰有 1 个被选中的概率为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{8}{15}$　D. $\frac{4}{7}$

7. 已知命题 p：函数 $f(x)=x^n(n\in\mathbf{Z})$的图象经过点$(-1,1)$，命题 q：函数 $g(x)=|x-n|$在$[-4,+\infty)$上单调递增，若$\neg q\wedge p$ 是真命题，则 n 的值可能为

A. -4　B. -3　C. -2　D. -1

8. 一个空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为



正视图　侧视图　俯视图

A. $\frac{19\pi}{3}$　B. $\frac{22\pi}{3}$　C. $\frac{19\pi}{4}$　D. $\frac{21\pi}{4}$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 AB,AD 的中点，则下列说法错误的是

A. MN∥平面 A_1BD

B. 平面 $A_1MN\perp$平面 ACC_1

C. 平面 $A_1BD\perp$平面 ACC_1

D. 直线 MN 与 BC_1 所成角为 45°

10. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-\frac{1}{2}$，对任意正整数 m,n，$a_{m+n}=a_ma_n$，T_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项的乘积，则使 $T_n>\frac{1}{2\,023}$的 n 的最大值为

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

11. 已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{8}=1$，P 为 C 上任意一点，过点 P 分别作 C 的两条渐近线的垂线，垂足分别为 M,N，则$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$的最小值为

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{9}{8}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　D. $\frac{8}{9}$

12. 已知函数$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$，函数 $h(x-1)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若函数 $y=f(x)$的图象和函数 $y=h(x)+2$ 的图象有 n 个交点，这 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个交点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，记$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=P$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=Q$，则

A. n 是奇数　B. $P=Q$

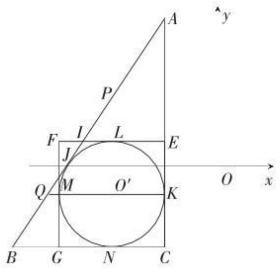
C. $2P=Q$　D. $P+Q=n$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若变量 x,y 满足约束条件$\begin{cases}8x-3y+3\geqslant 0\\5x+2y-4\leqslant 0\\x+y-1\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=y-3x$ 的最大值为________.

14. 当 $x=\theta$ 时，$f(x)=2\sin x-\cos x$ 取得最大值，则 $\tan 2\theta=$________.

15.《九章算术》有题"今有勾 8 步，股 15 步，问勾中容圆径几何？"这个勾股形的容圆问题是勾股形内切圆问题. 十三世纪李冶深入研究切于边线的圆，写成《测圆海镜》十二卷，此书是中国数学史上的一个辉煌成就，《测圆海镜》开卷有一个附图（见下图），图中涉及九种容圆，若在 $\mathrm{Rt}\triangle AIE$ 中，AI,AE,IE 所在直线的方程分别为 $4x-3y+23=0$，$x=-2$，$y=1$，则与边 AI,AE 的延长线及边 IE 相切的圆称为勾外容圆，该圆的标准方程为________________.



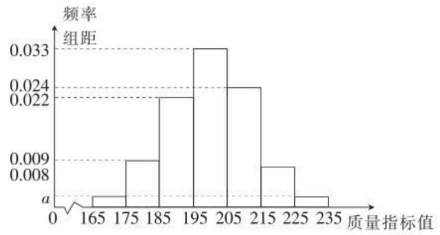
16. 已知斜率为 1 且不经过原点 O 的直线与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A,B 两点，若直线 OA,OB 的斜率之积为 -2，则$\triangle OAB$ 的面积为________.

三、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)公司检测一批产品的质量情况,共计 1 000 件,将其质量指标值统计如下所示.

(1)求 a 的值以及这批产品质量指标的平均值 $\bar{x}$ 以及方差 s^2;(同组中的数据用该组区间的中点值表示)

(2)若按照分层抽样的方法在质量指标值为[185,205)的产品中随机抽取 5 件,再从这 5 件中任取 3 件,求至少有 2 件产品的质量指标在[195,205)的概率.



18. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=n^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=\dfrac{n}{a_n^2a_{n+1}^2}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax(a\in\mathbf{R})$.

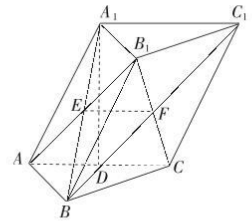
(1)若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,求 a 的值;

(2)若 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,求 a 的取值范围.

20. (12 分)如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2,且点 A_1 在底面 ABC 上的射影恰好为 AC 的中点 D.

(1)证明:平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 AB_1C;

(2)若 AB_1 与 A_1B 交于点 E,BC_1 与 B_1C 交于点 F,求几何体 $ABCEF$ 的体积.



21. (12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,焦距为 $2\sqrt{3}$,点 $P\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$关于点 $M\left(-\dfrac{7\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{4}\right)$的对称点 Q 恰好在椭圆 C 上.

(1)求 C 的标准方程;

(2)已知点 D 为椭圆 C 的下顶点,过 C 的左焦点 F 且斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$的直线与直线 PQ 交于点 E,证明:直线 DE 与 y 轴垂直.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=e^x+a+\sin x,a\in\mathbf{R}$.

(1)判断 $f(x)$ 在$[-1,+\infty)$上的单调性,并说明理由;

(2)若 $a\leqslant 2$,证明:$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)\geqslant a(x+1)+1$.

数学文科答案

1.【答案】B

【解析】因为 $A=\{-2,-1,2,4\}$，$B=\{x|-2<\frac{x}{2}-1<1\}=\{x|-2<x<4\}$，所以 $A\cap B=\{-1,2\}$，故选 B.

2.【答案】A

【解析】$\sin 660°\cos 900°=\sin(720°-60°)\cos(720°+180°)=-\sin 60°\cos 180°=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 A.

3.【答案】D

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$ 两边平方得 $5+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{4}$，故选 D.

4.【答案】B

【解析】$m=\frac{5W\log_2 2\,001}{W\log_2 1\,001}=\frac{5\lg 2\,001}{\lg 1\,001}\approx\frac{5\lg 2\,000}{\lg 1\,000}=\frac{5\times(3+\lg 2)}{3}\approx\frac{5\times(3+0.3)}{3}=5.5$，故选 B.

5.【答案】A

【解析】因为 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，所以 $f(1)=-1$，$f'(1)=2$，所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $2x-y-3=0$，故选 A.

6.【答案】C

【解析】从 A,B,C,D,E,F 这 6 个旅游小镇中选 4 个，结果有 $ABCD$，$ABCE$，$ABCF$，$ABDE$，$ABDF$，$ABEF$，$ACDE$，$ACDF$，$ACEF$，$ADEF$，$BCDE$，$BCDF$，$BCEF$，$BDEF$，$CDEF$，共 15 种，其中 A,B 只选 1 个的结果有 $ACDE$，$ACDF$，$ACEF$，$ADEF$，$BCDE$，$BCDF$，$BCEF$，$BDEF$，共 8 种，所以所求概率 $P=\frac{8}{15}$，故选 C.

7.【答案】C

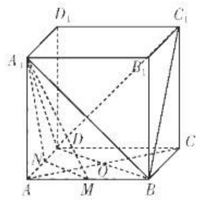
【解析】$\neg q\wedge p$ 是真命题，则 p 是真命题，q 是假命题，由 p 是真命题得 $(-1)^n=1$，n 是偶数，由 q 是假命题得 $n>-4$，故选 C.

8.【答案】D

【解析】该几何体是由一个圆台被截去 $\frac{1}{4}$ 部分后得到的，圆台的上、下底面半径分别为 1，2，高为 3，则该几何体的体积 $V=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}(\pi\times1^2+\pi\times2^2+\sqrt{\pi\times1^2\times\pi\times2^2})\times3=\frac{21\pi}{4}$，故选 D.

9.【答案】D

【解析】因为 M,N 分别为 AB,AD 的中点，所以 $MN/\!/BD$，又 $MN\not\subset$ 平面 A_1BD，$BD\subset$ 平面 A_1BD，所以 $MN/\!/$ 平面 A_1BD，A 正确；因为 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CC_1\perp BD$，又因为 $BD\perp AC$，$AC\cap CC_1=C$，所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1，$BD\subset$ 平面 A_1BD，所以平面 $A_1BD\perp$ 平面 ACC_1，又 $MN/\!/BD$，所以 $MN\perp$ 平面 ACC_1，又 $MN\subset$ 平面 A_1MN，所以平面 $A_1MN\perp$ 平面 ACC_1，所以 B，C 都正确；由于 $MN/\!/BD$，又 $\triangle BC_1D$ 为正三角形，则直线 MN 与 BC_1 所成角为 60°，所以 D 错误，故选 D.



10.【答案】B

【解析】由 $a_{m+n}=a_m a_n$ 得 $a_{n+1}=a_1 a_n=-\frac{1}{2}a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$、公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，$T_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，当 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为奇数时，$T_n<0$，当 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数，且 $\frac{n(n+1)}{2}\geqslant 12$ 时，$T_n\leqslant\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1}{4\ 096}<\frac{1}{2\ 023}$，当 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数，且 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 10$ 时，$T_n\geqslant\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1\ 024}>\frac{1}{2\ 023}$，经验证 n 的最大值为 4，故选 B.

11.【答案】A

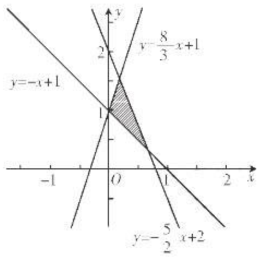
【解析】设点 $P(x_0,y_0)$，则点 P 满足 $x_0^2-\frac{y_0^2}{8}=1$①，两条渐近线为 $l_1:y=2\sqrt{2}x$，$l_2:y=-2\sqrt{2}x$，点 P 到两条渐近线的距离分别为 $d_1=\frac{|2\sqrt{2}x_0-y_0|}{3}$，$d_2=\frac{|2\sqrt{2}x_0+y_0|}{3}$，则 $d_1d_2=\frac{|8x_0^2-y_0^2|}{9}$②，将①代入②得到 $d_1d_2=\frac{8}{9}$，所以 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{d_1d_2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 A.

12.【答案】D

【解析】$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$，可见 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,2)$ 中心对称. 因为 $h(x-1)$ 是奇函数，所以 $h(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，$y=h(x)+2$ 的图象关于点 $(-1,2)$ 中心对称，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以 n 为偶数，由于两个函数的对称中心皆为点 $(-1,2)$，所以它们图象的交点也关于点 $(-1,2)$ 中心对称，$P=-n$，$Q=2n$，故选 D.

13.【答案】1

【解析】根据约束条件画出如图所示的可行区域，再利用几何意义求最值，由 $z=y-3x$，设直线 $l:y=3x+z$，z 为直线 l 的截距，当直线 l 经过 $8x-3y+3=0$ 与 $x+y-1=0$ 的交点 $(0,1)$ 时，z 取得最大值 1.



14.【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】$f(x)=2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 由 $f(\theta)=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{5}$，得 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cot\varphi=-2$，所以 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$.

15.【答案】$(x+4)^2+(y+1)^2=4$

【解析】设该圆的半径为 $r(r>0)$，则由圆心到直线 $x=-2$，$y=1$ 的距离均为 r，得圆心坐标为 $(-2-r,1-r)$，根据圆心到直线 $4x-3y+23=0$ 的距离为 r，得 $\frac{|4(-2-r)-3(1-r)+23|}{5}=r$，解得 $r=2$，所以该圆的标准方程

为$(x+4)^2+(y+1)^2=4$.

16.【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】设$A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$,设直线$AB$的方程为$x=y+t(t\neq0)$,与$y^2=4x$联立得$y^2-4y-4t=0$,$y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-4t$,直线$OA$,$OB$的斜率之积为$\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}\cdot\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}}=\frac{16}{y_1y_2}=\frac{16}{-4t}=-2$,所以$t=2$,直线$AB$过点$(2,0)$,则$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4^2-4\times(-8)}=4\sqrt{3}$.

17. 解:(1)依题意,$10\times(a+0.009+0.022+0.033+0.024+0.008+a)=1$,

解得$a=0.002$;(1分)

$\bar{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$;(3分)

$s^2=(170-200)^2\times0.02+(180-200)^2\times0.09+(190-200)^2\times0.22+(210-200)^2\times0.24+(220-200)^2\times0.08+(230-200)^2\times0.02=150$.(5分)

(2)由分层抽样可知,质量指标在$[185,195)$的产品中抽2个,记为A,B;在$[195,205)$的产品中抽3个,记为1,2,3,

则任取3个,所有的情况为$(A,B,1)$,$(A,B,2)$,$(A,B,3)$,$(A,1,2)$,$(A,1,3)$,$(A,2,3)$,$(B,1,2)$,$(B,1,3)$,$(B,2,3)$,$(1,2,3)$,共10种,(8分)

其中满足条件的为$(A,1,2)$,$(A,1,3)$,$(A,2,3)$,$(B,1,2)$,$(B,1,3)$,$(B,2,3)$,$(1,2,3)$,共7种,(9分)

故所求概率$P=\frac{7}{10}$.(10分)

18. 解:(1)当$n=1$时,$a_1=S_1=1$;(2分)

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$,(4分)

对$n=1$也适用,所以$a_n=2n-1$.(6分)

(2)因为$a_n=2n-1$,

所以$b_n=\frac{n}{a_n^2a_{n+1}^2}=\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$,(9分)

所以$T_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$

$=\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=\frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}$.(12分)

19. 解:(1)由题意可知,$f'(x)=3x^2-2x+a$,(1分)

由$f'(1)=1+a=0$,得$a=-1$.(2分)

检验:当$a=-1$时,$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$,(3分)

令$f'(x)>0$得,$x<-\frac{1}{3}$或$x>1$,

令$f'(x)<0$得,$-\frac{1}{3}<x<1$,(5分)

所以$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{3},1\right)$上单调递减.

所以$f(x)$在$x=1$处取得极小值,符合题意.

所以 $a=-1$.(6 分)

(2)因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

所以 $f'(x)=3x^2-2x+a\geqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立.(8 分)

所以 $a\geqslant -3x^2+2x$ 在 $[0,1]$ 上恒成立.(9 分)

令 $g(x)=-3x^2+2x, x\in[0,1]$,

则 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$,

所以 a 的取值范围是 $a\geqslant\frac{1}{3}$.(12 分)

20.(1)证明:因为点 A_1 在底面 ABC 上的射影恰好为 AC 的中点 D,

所以 $A_1D\perp AC$,(1 分)

连接 BD,因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,

所以 $BD\perp AC$,(2 分)

因为 $A_1D\cap BD=D$,所以 $AC\perp$ 平面 A_1BD,

因为 $A_1B\subset$ 平面 A_1BD,

所以 $AC\perp A_1B$,(3 分)

因为四边形 ABB_1A_1 是边长为 2 的菱形,

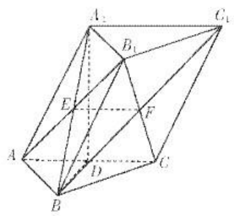
所以 $A_1B\perp AB_1$,(4 分)

因为 $AB_1\cap AC=A$,

所以 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C,(5 分)

因为 $A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1,

所以平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 AB_1C.(6 分)



(2)解:由题可知,点 E 为 AB_1 的中点,点 F 为 B_1C 的中点,

所以梯形 $AEFC$ 的面积是 $\triangle AB_1C$ 的面积的 $\frac{3}{4}$,

所以 $V_{几何体ABCEF}=V_{四棱锥B\ AEFC}=\frac{3}{4}V_{三棱锥B\ AB_1C}=\frac{3}{4}V_{三棱锥B_1\ ABC}$,(9 分)

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2,且点 A_1 在底面 ABC 上的射影为 AC 的中点 D,

所以三棱锥 B_1-ABC 的高为 $A_1D=\sqrt{3}$,

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$,

所以 $V_{三棱锥B_1\ ABC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$,(11 分)

所以几何体 $ABCEF$ 的体积为 $\frac{3}{4}$.(12 分)

21. (1)解：因为 $2c=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

所以 $a^2-b^2=3$，①(2 分)

又由点 $P\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$ 关于点 $M\left(-\frac{7\sqrt{3}}{6},\frac{1}{4}\right)$ 的对称点 $Q\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在 C 上，所以 $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，②

联立①②得 $\begin{cases}a^2-b^2=3,\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=1$，所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (5 分)

(2)证明：由题意得，直线 PQ 的斜率为 $\frac{\frac{1}{2}-0}{-\sqrt{3}-\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，(6 分)

所以直线 PQ 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$，

直线 EF 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，(8 分)

由 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1,\end{cases}$ 得 $E(-2\sqrt{3},-1)$，(10 分)

又 $D(0,-1)$，所以直线 DE 的方程为 $y=-1$，(11 分)

所以直线 DE 与 y 轴垂直. (12 分)

22. (1)解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f'(x)=e^x+\cos x$，(1 分)

当 $x\in\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，而 $e^x\in\left[\frac{1}{e},e^{\frac{\pi}{2}}\right]$，所以 $f'(x)>0$，(2 分)

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时，$\cos x\in[-1,1]$，而 $e^x>e^{\frac{\pi}{2}}>e^0=1$，

所以 $f'(x)>0$. (4 分)

所以当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$e^x+\cos x>0$，即 $f'(x)>0$.

综上，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增. (5 分)

(2)证明：$f(x)\geqslant a(x+1)+1$ 即 $e^x+\sin x-ax-1\geqslant 0$，(6 分)

设 $h(x)=e^x+\sin x-ax-1\ (x\geqslant 0)$，

则 $h'(x)=e^x+\cos x-a$，

令 $g(x)=h'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\sin x$，

因为 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x\geqslant 1$，$\sin x\in[-1,1]$，

所以 $g'(x)=e^x-\sin x>0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(x)=e^x+\cos x-a\geqslant g(0)=2-a\geqslant 0$. (10 分)

从而有 $h(x)\geqslant h(0)=0$，

即 $f(x)\geqslant a(x+1)+1$.

综上得 $a\leqslant 2$，$x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant a(x+1)+1$. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。