理科数学参考解答及评分参考

1. D　2. A　3. D　4. C　5. C　6. A　7. B　8. A　9. C　10. B　11. D　12. D

13. $1-i$　　14. $-\frac{11}{2}$　　15. $3\times2^{n-1}-2$　　16. $16(\sqrt{2}-1)\pi$

17. (12 分)

解析：(1)甲生产线抽取 200 件产品中，评分在$[75,80)$，$[80,85)$，$[85,90)$，$[90,95)$，$[95,100]$的频率分别为 0.05，0.05，0.15，0.5，0.25. ………………………………………… 2 分

则评分均值为 $X=77.5\times0.05+82.5\times0.05+87.5\times0.15+92.5\times0.5+97.5\times0.25=91.75$.

所以，甲生产线抽取 200 件产品的评分的均值为 91.75 分. ……………………………… 4 分

(2)分别在甲、乙生产线抽取到"优质品"的概率为$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，又 $\xi=0,1,2,3,4$.

则 $P(\xi=0)=C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\times C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{64}$； ………………………………………………………… 5 分

$P(\xi=1)=C_2^1\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8}{64}$； ……………………………… 6 分

$P(\xi=2)=C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{22}{64}$； ……… 7 分

$P(\xi=3)=C_2^1\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{24}{64}$； ……………………………… 8 分

$P(\xi=4)=C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{64}$. ………………………………………………………… 9 分

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{8}{64}$或填$\frac{1}{8}$	$\frac{22}{64}$或填$\frac{11}{32}$	$\frac{24}{64}$或填$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}$

……………………………………………………………………………………… 10 分

故数学期望 $EX=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{8}{64}+2\times\frac{22}{64}+3\times\frac{24}{64}+4\times\frac{9}{64}=\frac{160}{64}=\frac{5}{2}$. …………………… 12 分

18. (12 分)

解析：(1)在$\triangle ABC$中，由正弦定理及 $b=2$，$\sin B:\sin C=\sqrt{2}:2$，

可得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=2\times\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 3 分

(2)由 $\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:2$ 及正弦定理得 $a:b:c=1:\sqrt{2}:2$，

再由余弦定理有 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$. ………………………………………… 6 分

(3)由(2)可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$，

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\dfrac{\sqrt{14}}{8}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{9}{16}$. ………………………………………………………………… 9 分

所以 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin 2A\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2A\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{16}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{5\sqrt{7}+9\sqrt{3}}{32}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19.(12 分)

解析：(1)当 M 为 PD 的中点时满足条件. 证明如下： ………………………………… 1 分

设 O 为 AC,BD 的交点.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 O 为 BD 的中点，

故在 $\triangle PBD$ 中，OM 为 $\triangle PBD$ 的中位线，即 $OM /\!/ BP$. ………………………………… 2 分

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CQ\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AP /\!/ CQ$，即四点 A,C,P,Q 共面.

又因为 $PA=CQ$，所以四边形 $ACQP$ 为平行四边形，所以 $AC /\!/ PQ$. ……………………… 3 分

而 AC 与 OM 相交，PQ 与 BP 相交，所以平面 $ACM /\!/$ 平面 BPQ.

又因为 $AM\subset$ 平面 ACM，所以直线 $AM /\!/$ 平面 BPQ. ………………………………… 5 分

(2)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp AD$，故 $AB\perp$ 平面 PAD.

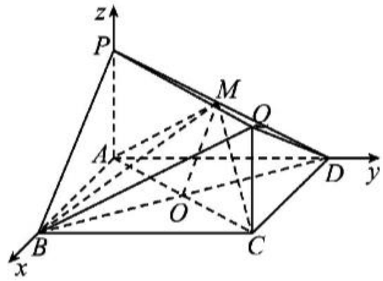
又因为 $AM\subset$ 平面 PAD，所以 $AB\perp AM$，即 $\triangle ABM$ 为直角三角形.

由于 $S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}|AB||AM|$，故当 $|AM|$ 最小时，$S_{\triangle ABM}$ 最小，此时 $AM\perp PD$. ………… 7 分

因为 $AD=1$，$PA=2$，$PA\perp AD$，

所以 $AM=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$PM=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $PM=\dfrac{1}{5}PD$.

由 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，$AB\perp AD$，可以以 AB,AD,AP 所在直线为 x,y,z 轴建立如图所示坐标系.



则 $A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$D(0,4,0)$，$C(4,4,0)$，$P(0,0,2)$，

所以 $M\left(0,\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$. ………………………………………… 9 分

所以$\overrightarrow{DC}=(4,0,0)=4(1,0,0)$，

$\overrightarrow{DM}=\left(0,-\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)=\frac{8}{5}(0,-2,1)$.

由上，易得平面 DCM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$.

又因为$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-4,\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)=-\frac{4}{5}(5,-1,-2)$，

设平面 BCM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}y_2=0,\\5x_2-y_2-2z_2=0.\end{cases}$

可得平面 BCM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(2,0,5)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{10}{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{145}}{29}$. ………………………………………………………… 11 分

注意到二面角 $B-CM-D$ 的平面角是钝角，

所以二面角 $B-CM-D$ 的余弦值为$-\frac{2\sqrt{145}}{29}$. ………………………………………………… 12 分

20.（12 分）

解析：(1)由题意 $c=b=\sqrt{2}$，从而 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

于是 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………… 2 分

(2)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$N(2\sqrt{2},n)$，直线 PQ 的方程为 $x=ty+\sqrt{2}$，其中 $t=\frac{\sqrt{2}}{n}$.

由$\begin{cases}x=ty+\sqrt{2},\\x^2+2y^2=4,\end{cases}$得$(t^2+2)y^2+2\sqrt{2}ty-2=0$，

故 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{2}t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-2}{t^2+2}$. ………………………………………………………… 4 分

从而$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{(ty_1+\sqrt{2})y_2+(ty_2+\sqrt{2})y_1}{y_1y_2}$

$=2t+\frac{\sqrt{2}(y_1+y_2)}{y_1y_2}=2t+\frac{-4t}{-2}=4t=\frac{4\sqrt{2}}{n}$.

因为 $k_3=k_{ON}=\frac{n}{2\sqrt{2}}$，所以$\frac{1}{k_3}=\frac{2\sqrt{2}}{n}$.

从而$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{2}{k_3}$， ………………………………………………………………… 6 分

即$\dfrac{k_1+k_2}{k_1k_2}=\dfrac{2}{k_3}$，于是$(k_1+k_2)k_3=2k_1k_2$.

由$(k_1+k_2)k_3=1$得$k_1k_2=\dfrac{1}{2}$. …………………………………………………………… 8分

设$OP:y=k_1x$，$OQ:y=k_2x$.

由$\begin{cases}y=k_1x,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$得：$(1+2k_1^2)x^2=4$，即$x_P^2=\dfrac{4}{1+2k_1^2}$.

同理可得$x_Q^2=\dfrac{4}{1+2k_2^2}$.

故$|OP|^2+|OQ|^2=(1+k_1^2)\dfrac{4}{1+2k_1^2}+(1+k_2^2)\dfrac{4}{1+2k_2^2}$

$=4\left(\dfrac{k_1^2+1}{2k_1^2+1}+\dfrac{k_2^2+1}{2k_2^2+1}\right)$

$=4\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2k_1^2+1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2k_2^2+1}\right]$

$=4+2\left(\dfrac{1}{2k_1^2+1}+\dfrac{1}{2k_2^2+1}\right)$

$=4+2\left(\dfrac{2k_1^2+2k_2^2+2}{4k_1^2k_2^2+2k_1^2+2k_2^2+1}\right)=6$. …………………………………………………… 12分

21.（12分）

解析：(1)由$f(x)=(x-1)e^x+ax+2$，得$f'(x)=xe^x+a$，

①若$a\geqslant0$，则$f'(x)>0$，此时$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，满足条件；

②若$a<0$，令$g(x)=xe^x+a$，可知$x>0$时，$g(x)$单调递增， …………………………… 3分

由于$f(x)$在区间$(0,1)$上存在单调递增区间，则$g(x)>0$即$a>-xe^x$在$(0,1)$上有解，

由于$-xe^x$在$(0,1)$上单调递减，则$-e<-xe^x<0$，此时$-e<a<0$.

综上所述，若$f(x)$在区间$(0,1)$上存在单调递增区间，则a的取值范围是$(-e,+\infty)$. ……

…………………………………………………………………………………………… 5分

(2)令$h(x)=(x-1)e^x+ax-\sin x-\cos x+2$，原不等式即为$h(x)\geqslant0$，

可得$h(0)=0$，$h'(x)=xe^x+a-\cos x+\sin x$，$h'(0)=a-1$，

令$u(x)=h'(x)=xe^x+a-\cos x+\sin x$，则$u'(x)=(x+1)e^x+\sin x+\cos x$，

又设$t(x)=(x+1)e^x$，则$t'(x)=(x+2)e^x$，则$x\geqslant0$，$t'(x)>0$，可知$t(x)$单调递增，

若$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有$(x+1)e^x>0$，$\sin x+\cos x>0$，则$u'(x)>0$；………………………… 7分

若$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$，有$(x+1)e^x\geqslant\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)e^{\frac{\pi}{2}}>e$，则$u'(x)=(x+1)e^x+\sin x+\cos x>0$，

所以,$x\geqslant 0, u'(x)>0$,则 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 单调递增,

ⅰ)当 $a-1\geqslant 0$ 即 $a\geqslant 1$ 时,$h'(x)\geqslant h'(0)\geqslant 0$,则 $h(x)$ 单调递增,

所以,$h(x)\geqslant h(0)=0$ 恒成立,则 $a\geqslant 1$ 符合题意. …………………………………………… 9 分

ⅱ)当 $a-1<0$ 即 $a<1$ 时,

$h'(0)<0, h'(2-a)=(2-a)e^{(2-a)}+a-\cos(2-a)+\sin(2-a)\geqslant 2-a+a-\cos(2-a)+\sin(2-a)>0$,

存在 $x_0\in(0,2-a)$,使得 $h'(x_0)=0$,

当 $0<x<x_0$ 时,$h'(x)<0$,则 $h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)<h(0)=0$,与题意不符,

综上所述,a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. …………………………………………………………… 12 分

22.(10 分)

解析:(1)由已知,$\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,

所以 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$,即 $x^2+y^2+2x-2y=0$,

故 C 的普通方程为 $x^2+y^2+2x-2y=0$. ………………………………………………………… 3 分

又因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

所以 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$,

即 $\rho=2\sin\theta-2\cos\theta$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由题意知 $|OA|=2\sin\pi-2\cos\pi=2$,

$|OB|=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\cos\alpha+2\sin\alpha$, …………………………………… 6 分

于是 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$

$=(2\cos\alpha+2\sin\alpha)\cos\alpha=2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha$

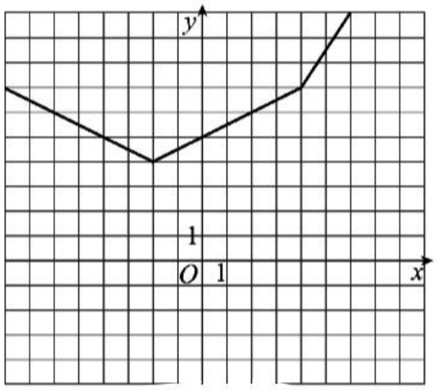
$=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+1=\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\frac{\pi}{4}\leqslant 2\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$,

所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即当 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时,$\triangle AOB$ 的面积最大,且最大值是 $\sqrt{2}+1$. ………… 10 分

23.(10 分)

解析:(1)由题,得 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+3, & x<-2,\\ \frac{1}{2}x+5, & -2\leqslant x\leqslant 4,\\ \frac{3}{2}x+1, & x>4,\end{cases}$ 图象如图所示. …………………………… 3 分



…………………… 4 分

由图可知，$f(x)\leq 6$ 的解集为 $\{x\mid -6\leq x\leq 2\}$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，函数 $f(x)$ 的最小值为 $T=4$，则 $a+b=4$. ………………………………… 6 分

只需证明 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ 即可.

由已知，$a>0$，$b>0$，则 $4=a+b\geq 2\sqrt{ab}$，所以 $0<ab\leq 4$. ……………………………… 7 分

于是 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq\frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}$，……………………………………………… 8 分

因为 $(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$

$=a^2b^2+(a+b)^2-2ab+1$

$=a^2b^2-2ab+17$

$=(ab-1)^2+16$，

由于 $0<ab\leq 4$，则 $16\leq(ab-1)^2+16\leq 25$，即 $16\leq(a^2+1)(b^2+1)\leq 25$，

所以 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq\frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}\geq\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立. ……

……………………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。