2023届陕西省第四次模拟考试

文科数学参考答案

1. B　**解析：** 因为集合 $A=\{x||x-1|<1\}=(0,2)$，$B=\{x|x^2+x\geqslant 0\}=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，$A\cap B=(0,2)$，$(C_UA)\cup(C_UB)=C_U(A\cap B)=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

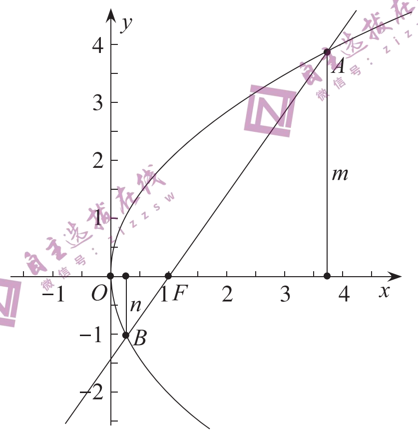
2. A　**解析：** 因为 $z\cdot(3+2i)=-1+3i$，所以 $z=\dfrac{-1+3i}{3+2i}=\dfrac{(-1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{11}{13}i$，则 z 的虚部为 $\dfrac{11}{13}$.

3. C　**解析：** 如图，2020年的货物进出口总额为142936+179279=322215亿元，故选项A正确；2020年的货物进出口顺差为179279-142936=36343亿元，故选项B正确；2020年的货物进口总额为142936亿元，相对于2019的货物进口总额143254亿元下降了，故选项C错误；2017—2021年，货物出口总额逐年上升，故选项D正确.

4. C　**解析：** 由 $PH=-\lg[\mathrm{H}^+]=-\lg(6\times10^{-8})=8-\lg 6\approx 8-0.78=7.22$.

5. A　**解析：** 因为直线 l: $\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$ 过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，且与 C 交于 A，B 两点，设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=\sqrt{2}$，所以 $|AF|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$，则 $m=|AF|\sin\theta=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}$，$n=|BF|\sin\theta=\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$，

所以，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



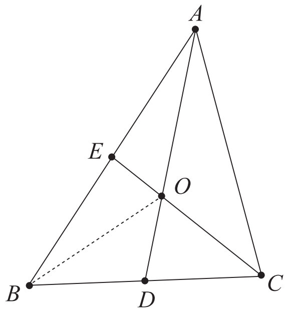
6. B　**解析：** 因为单位向量 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 θ，且向量 $2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ 与 $\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 120°，

所以 $\cos120^\circ=\dfrac{(2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2})}{|2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}||\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}|}=\dfrac{-1-5\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}\sqrt{10-6\cos\theta}}=-\dfrac{1}{2}$，$62\cos^2\theta+15\cos\theta-23=0$，$(2\cos\theta-1)(31\cos\theta+23)=0\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-\dfrac{23}{31}$，又因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

7. C　**解析：** 如图，连接 BO，$\because a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{13}$，$\therefore\cos\angle ACB=\dfrac{3^2+4^2-\sqrt{13}^2}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$.

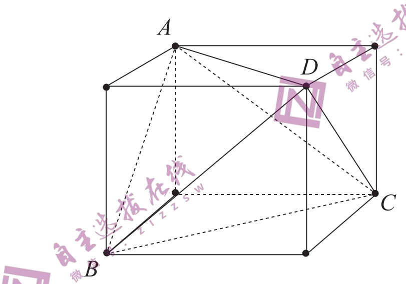
因为点D，E分别是边BC，BA的中点，且AD，CE交于点O，所以O为ΔABC的重心，则$\dfrac{OE}{CE}=\dfrac{1}{3}$，则$\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ACB}}=\dfrac{1}{3}$，又因为$\dfrac{S_{\Delta EOB}}{S_{\Delta AOB}}=\dfrac{1}{2}$，所以$S_{\Delta EOB}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}$，同理，$S_{\Delta DOB}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}$，

则 $S_{BDOE}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}+\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，即四边形$BDOE$的面积为$\sqrt{3}$.



8. B　**解析**：由题意得该四面体$ABCD$的直观图如图所示，图中长方体的棱长分别为2，1，$\sqrt{3}$，

则$AD=BC=\sqrt{5}$，$AB=CD=2$，$AC=BD=\sqrt{7}$，四面体$ABCD$的四个面的面积均相等，每一个面的面积为$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\times\sqrt{1-\left(\dfrac{5+4-7}{2\times\sqrt{5}\times2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$，则四面体$ABCD$的表面积为$4\times\dfrac{\sqrt{19}}{2}=2\sqrt{19}$.



9. C　**解析**：因为函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0,\ -\pi<\varphi<0)$，$f(0)=\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，

所以$f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\omega x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\dfrac{\frac{2}{3}\pi+k\pi}{\omega}$，$k\in Z$.

所以

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}\pi+49\pi}{\omega}\leqslant100\pi\\[2ex]\dfrac{\frac{2}{3}\pi+50\pi}{\omega}>100\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega\geqslant\dfrac{149}{300}\\[2ex]\omega<\dfrac{38}{75}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{149}{300}\leqslant\omega<\dfrac{38}{75}$$，所以ω的取值范围是是$\left[\dfrac{149}{300},\dfrac{38}{75}\right)$，故选C.

10. C　**解析**：因为数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-20n+29$，$n=1$时，$a_1=S_1=10$，

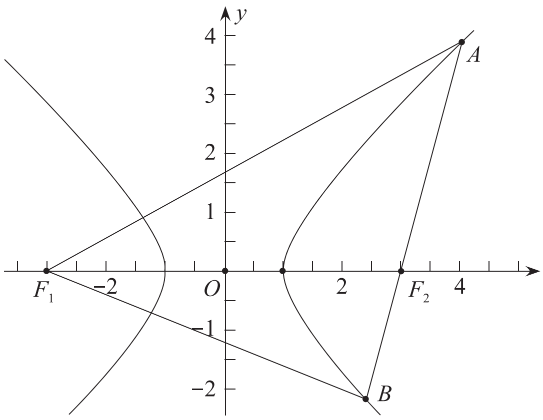
当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-20n+29-[(n-1)^2-20(n-1)+29]=2n-21$，

所以$a_n=\begin{cases}10, & n=1\\2n-21, & n\geqslant2\end{cases}$，则$a_1=10>0$，当$2\leqslant n\leqslant10$时，$a_n=2n-21<0$，当$n\geqslant11$时，$a_n=2n-21>0$，所以数列$\{|a_n|\}$的前50项和为

$T_{50}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{50}|=a_1-(a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{50})=10-\dfrac{9\times(-17-1)}{2}+\dfrac{40\times(1+79)}{2}$，所以$T_{50}=1691$，故选D.

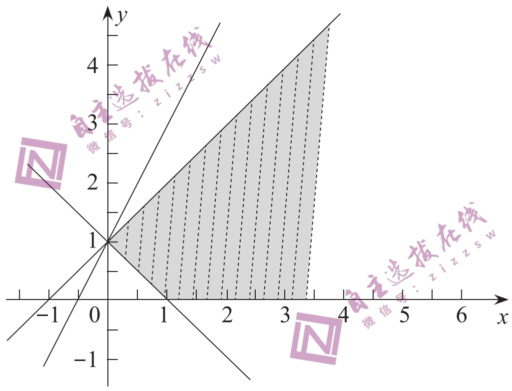
11. A　**解析**：设$|BF_2|=t$，因为$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以$|AF_2|=2t$，由$|BF_1|-|BF_2|=2a\Rightarrow|BF_1|=t+2a$，由$|AF_1|-|AF_2|=2a\Rightarrow|AF_1|=2t+2a$.设$|F_1F_2|=2c$，$c^2=a^2+b^2$，因为$\angle ABF_1=60°$，在$\Delta BF_1F_2$中，$\cos\angle F_1BF_2=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+2a)^2+t^2-(2c)^2}{2\times(t+2a)\times t}\Rightarrow t^2+2at+4a^2-4c^2=0$①；在$\Delta BF_1A$中，$\cos\angle F_1BA=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+2a)^2+(3t)^2-(2t+2a)^2}{2\times(t+2a)\times3t}\Rightarrow3t^2-10at=0\Rightarrow t=\dfrac{10}{3}a$，

代入①式得$e=\frac{c}{a}=\frac{7}{3}$，则双曲线$C$的离心率为$\frac{7}{3}$故选A.



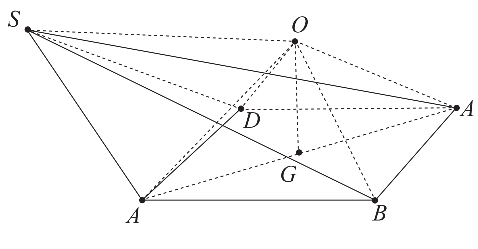
12. B　**解析：**因为$a=\log_6 4<1$，$b=\log_9 5<1$，$c=\log_3 \pi>1\Rightarrow a<c$，$b<c$；
$4a=4\log_6 4=\log_6 4^4>\log_6 6^3=3$，$4b=4\log_9 5=\log_9 5^4<\log_9 9^3=3$，所以$b<a$.
综上，$b<a<c$，故选B.

13. 1　**解析：**如图所示，x，y满足的平面区域如图中阴影所示，令$z=y-2x$，即直线$y=2x+z$经过点(0，1)时，z最大，且$z_{max}=1$，即$y-2x$的最大值为1.



14. $\frac{3}{5}$　**解析：**设男生为A，B，C，女生为a，b，则从中选3人的所有的情况为：(A，B，C)，(A，B，a)，(A，B，b)，(A，C，a)，(A，C，b)，(A，a，b)，(B，C，a)，(B，C，b)，(B，a，b)，(C，a，b)，共10种情况；这3人中恰有2个男生的所有的情况为：(A，B，a)，(A，B，b)，(A，C，a)，(A，C，b)，(B，C，a)，(B，C，b)，共6种情况.所以这3人中恰有2个男生的概率为$P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

15. 18π　**解析：**如图，四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$SAC\perp$平面$ABCD$，所以四棱锥$S-ABCD$外接球的球心是ΔABC外接圆的圆心O，因为$\cos\angle SAC=-\frac{1}{3}$，所以$\sin\angle SAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则$\frac{SC}{\sin\angle SAC}=\frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R\Rightarrow R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以$S=4\pi R^2=4\pi(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=18\pi$.



16. ②③　**解析：** 因为 $f(x)=3\cos x-\dfrac{2}{\cos x}$，$\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x|x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$故①错误；$f(-x)=3\cos(-x)-\dfrac{2}{\cos(-x)}=3\cos x-\dfrac{2}{\cos x}=f(x)$，$f(x)$图象关于$y$轴对称，故②正确；

$f(2k\pi+\pi-x)=3\cos(2k\pi+\pi-x)-\dfrac{2}{\cos(2k\pi+\pi-x)}=-3\cos x+\dfrac{2}{\cos x}=-f(x)$，

$f(x)$的图象关于点$(k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 0)$，$k\in Z$对称，故③正确；令$t=\cos x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$和$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$上单调递减，$y=3t-\dfrac{2}{t}$单调递增，所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$和$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$上均是单调递减，故④错误；则所有真命题的序号是②③.

17.（12分）解：（1）因为$2a_{n+1}=3a_n+4$，所以$2(a_{n+1}+4)=3a_n+12=3(a_n+4)$，即$a_{n+1}+4=\dfrac{3}{2}(a_n+4)$，又因为$a_1=-3$，则$a_1+4=1\neq 0$，$\dfrac{a_{n+1}+4}{a_n+4}=\dfrac{3}{2}$，所以数列$\{a_n+4\}$为等比数列；
…………………………………………………………………………………………… 4分

（2）由（1）得$a_n+4=(a_1+4)\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$，则$a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-4$，

所以 $S_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{1-\dfrac{3}{2}}-4n=2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-2-4n$，　………………………………………………… 6分

当$n\geqslant 2$时，$S_n-S_{n-1}=\left[2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-2-4n\right]-\left[2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2-4(n-1)\right]=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-4$，
…………………………………………………………………………………………… 8分

所以当$n\geqslant 5$且$n\in N^*$时，$S_n-S_{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-4>0$,即$S_n>S_{n-1}$，则$S_4<S_5<S_6<\cdots\cdots$；

当$2\leqslant n\leqslant 4$且$n\in N^*$时，$S_n-S_{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-4<0$,即$S_n<S_{n-1}$，则$S_4<S_3<S_2<S_1$.

综上，$(S_n)_{\min}=S_4=-\dfrac{63}{8}$，即$S_n$的最小值为$-\dfrac{63}{8}$.　…………………………………………… 12分

18.（12分）解：（1）因为该中学冬奥知识竞赛成绩的中位数的估计值为82分，所以

$\begin{cases}6+4+a+b+18=100\\6+4+a+b\times\dfrac{82-80}{10}=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=32\\b=40\end{cases}$，则$a$，$b$的值分别为32和40；　……………………… 6分

（2）该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数为：

$\bar{x}=\dfrac{6\times 55+4\times 65+32\times 75+40\times 85+18\times 95}{100}=81$；　………………………………………… 9分

该中学冬奥知识竞赛成绩的标准差为：

$S=\sqrt{\dfrac{1}{100}[6\times(55-81)^2+4\times(65-81)^2+32\times(75-81)^2+40\times(85-81)^2+18\times(95-81)^2]}$

.所以$S=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\approx 2\times 5.1=10.2$.

该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数与标准差的估计值分别为81和10.2.　……………………… 12分

19.（12分）解：（1）如图，取AC的中点O，连接OD，OA_1，

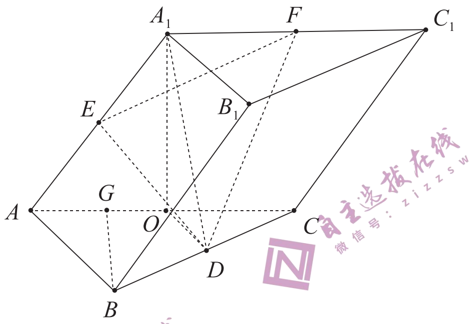
因为$AA_1=AC=2$，$\angle A_1AC=60°$，所以ΔA_1AC为等边三角形，所以$A_1O\perp AC$.又因为$\angle ABC=90°$，点O，D分别为线段AC，BC的中点，所以$OD//AB$，所以$OD\perp BC$，又因为$BC\perp A_1D$，$OD\cap A_1D=D$，所以$BC\perp$平面A_1OD，则$BC\perp A_1O$，又因为$AC\cap BC=C$，

所以$A_1O\perp$平面ABC，又因为$A_1O\subset$平面ACC_1A_1，所以平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC. ………… 5分

（2）如图，过B作$BG\perp AC$于点G，由（1）得平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC，且平面$ACC_1A_1\cap$平面$ABC=AC$，所以$BG\perp$平面ACC_1A_1，在直角ABC中，

$AC=2$，$AB=1$，$\angle ABC=90°$，所以$BC=\sqrt{3}$，由$AB\cdot BC=AC\cdot BG\Rightarrow BG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为点D为线段BC的中点，所以点D到平面ACC_1A_1的距离h为点B到平面ACC_1A_1的距离BG的一半，即$h=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.因为点$E$，$F$分别为线段$AA_1$，$A_1C_1$的中点，所以$A_1E=A_1F=1$，又因为$\angle EA_1F=120°$，所以$\Delta EA_1F$的面积为$S_{\Delta EA_1F}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$V_{A_1-DEF}=V_{D-A_1EF}=\frac{1}{3}\times S_{EA_1F}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{16}$，所以三棱锥$A_1-DEF$的体积为$\frac{1}{16}$. ……… 12分



20.（12分）解：（1）因为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，点$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$与圆$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$上点$M$的距离的最大值为$\sqrt{(1-0)^2+(\frac{3}{2}-\frac{5}{2})^2}+1=\sqrt{2}+1=\sqrt{a}+1$，解得$a=2$，$b=\sqrt{3}$，则椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………… 4分

（2）当直线l斜率存在时，设直线$l:y=kx+m$，

$\begin{cases}y=kx+m\\3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$，

设点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}\\x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}\end{cases}$， ………………………………………… 6分

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1,\ y_1-\sqrt{3})\cdot(x_2,\ y_2-\sqrt{3})=x_1x_2+(y_1-\sqrt{3})(y_2-\sqrt{3})$

$=x_1x_2+(kx_1+m-\sqrt{3})(kx_2+m-\sqrt{3})=(1+k^2)x_1x_2+(km-\sqrt{3}k)(x_1+x_2)+(m-\sqrt{3})^2$

$=(1+k^2)\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+(km-\sqrt{3}k)\frac{-8km}{3+4k^2}+(m-\sqrt{3})^2=0$ ………………………………… 8分

所以$7m^2-6\sqrt{3}m-3=0\Rightarrow m=\sqrt{3}$或$m=-\frac{\sqrt{3}}{7}$.

则直线$l:y=kx+\sqrt{3}$或l：$y=kx-\frac{\sqrt{3}}{7}$，因为Q与A，B不重合，所以直线l：$y=kx-\frac{\sqrt{3}}{7}$，即直线过定点$\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$. ………………………………………………………………… 10分

当直线l斜率不存在时，设直线$l:x=t$，不妨设$A\left(t,\sqrt{3-\frac{3}{4}t^2}\right)$，$B\left(t,\ -\sqrt{3-\frac{3}{4}t^2}\right)$，

所以$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\left(t,\sqrt{3-\frac{3}{4}t^2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(t,\ -\sqrt{3-\frac{3}{4}t^2}-\sqrt{3}\right)=t^2+3-(3-\frac{3}{4}t^2)=\frac{7}{4}t^2=0.$

所以 $t=0$，直线 $l:x=0$，因为 Q 与 A，B 不重合，所以不满足题意.

综上，直线 l 过定点 $\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$. …………………………………………………… 12分

21.（12分）解：（1）$f'(x)=a(\ln x+1)-2=a\ln x+a-2$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2<0$，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减；……………………………… 1分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=a\ln x+a-2>0\Rightarrow x>e^{\frac{2-a}{a}}$，

$f'(x)=a\ln x+a-2<0\Rightarrow 0<x<e^{\frac{2-a}{a}}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\ e^{\frac{2-a}{a}}\right)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $\left(e^{\frac{2-a}{a}},\ +\infty\right)$ 上单调递增；……………………………………………………………… 3分

当 $a<0$ 时，$f'(x)=a\ln x+a-2>0\Rightarrow 0<x<e^{\frac{2-a}{a}}$，

$f'(x)=a\ln x+a-2<0\Rightarrow x>e^{\frac{2-a}{a}}$，则 $f(x)$ 在 $(0,\ e^{\frac{2-a}{a}})$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $\left(e^{\frac{2-a}{a}},\ +\infty\right)$ 上单调递减. …………………………………………………………………………………… 5分

综上，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\ e^{\frac{2-a}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{\frac{2-a}{a}},\ +\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\ e^{\frac{2-a}{a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(e^{\frac{2-a}{a}},\ +\infty\right)$ 上单调递减. ………………………… 6分

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=x\ln x-2x$，$f(e^x)=e^x\ln e^x-2e^x=(x-2)e^x$，

要证 $f(x)+f(e^x)+2e>0$，即证 $f(x)>-f(e^x)-2e$，

令 $g(x)=-f(e^x)-2e=(2-x)e^x-2e$，也就是要证明 $f(x)>g(x)$. ………………………… 8分

由（1）得 $f(x)$ 在 $(0,\ e)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(e,\ +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(e)=-e$；$g'(x)=(1-x)e^x$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增，则 $g(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(1)=-e$；则 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$，又因为 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，而 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，所以 $f(x)>g(x)$，综上，$f(x)+f(e^x)+2e>0$. ……………………………… 12分

22. [选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

解：（1）因为 $A(-2,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，动点 $P(x,\ y)$ 满足 $|PA|=2|PB|$，

所以 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，整理得曲线 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，则曲线 C 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数）；………………………………………………… 5分

（2）因为 $|PA|=2|PB|$，所以 $|PA|\cdot|PB|=\dfrac{1}{2}|PA|^2=\dfrac{1}{2}[(2+2\cos\theta+2)^2+(2\sin\theta)^2]$，

则 $|PA|\cdot|PB|=\dfrac{1}{2}|PA|^2=\dfrac{1}{2}(20+16\cos\theta)=10+8\cos\theta\in[2,\ 18]$，

所以 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围为 $[2,\ 18]$. …………………………………………………………………… 10分

23. [选修4-5：不等式选讲]（10分）

解：（1）当 $a=0$ 时，不等式 $f(x)\leqslant 4$ 化简为 $|x^2-3|+|x^2-1|\leqslant 4$，令 $t=x^2\in[0,\ +\infty)$，

则 $|t-3|+|t-1|\leqslant 4$，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$4-2t\leqslant 4\Rightarrow t\geqslant 0$，则 $0\leqslant t\leqslant 1$；

当 $1<t<3$ 时，$2\leqslant 4$ 恒成立，则 $1<t<3$；

当 $t\geqslant 3$ 时，$2t-4\leqslant 4\Rightarrow t\leqslant 4$ 恒成立，则 $3\leqslant t\leqslant 4$.

综上，$0\leqslant t\leqslant 4$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$. ……………… 5分

（2）$f(x)=|x^2-3a^2-3|+|x^2-a-1|\geqslant 2$ 恒成立，

因为 $f(x)=|x^2-3a^2-3|+|x^2-a-1|=|3a^2+3-x^2|+|x^2-a-1|\geqslant|3a^2-a+2|=3a^2-a+2$.

即 $3a^2-a+2\geqslant 2$，解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$. ………………………………………………………… 10分