2023届高三一轮复习联考(三) 全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由 $x^2\leqslant 1$,即 $(x-1)(x+1)\leqslant 0$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,所以 $A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$.故选 A.

2.D 【解析】$\forall x\in\mathbf{R},2x^2+x-2<0$ 的否定为:$\exists x_0\in\mathbf{R},2x_0^2+x_0-2\geqslant 0$,故选 D.

3.A 【解析】$z=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$,即复数 z 的虚部为 2,故选 A.

4.D 【解析】$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)=8$,$f(8)=\log_2 8=3$,故选 D.

5.C 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$.故选 C.

6.A 【解析】$f(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}=-f(x)$,所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数,排除 B 选项,又 $f(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{5}>1$,排除 C,D 选项,故选 A.

7.D 【解析】由题意,函数 $y=2\sin x-\cos 2x+1=2\sin^2 x+2\sin x$,令 $t=\sin x\in[-1,1]$,可得 $y=2t^2+2t=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$,当 $t=-\dfrac{1}{2}$,即 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 时,函数取得最小值,最小值为 $-\dfrac{1}{2}$.故选 D.

8.A 【解析】因为 $a_{n+1}-a_n<0$,所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+2n+m-[-(n-1)^2+2(n-1)+m]=-2n+3$,故可知当 $n\geqslant 2$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,故 $\{a_n\}$ 为递减数列,只需满足 $a_2<a_1$,即 $-1<1+m\Rightarrow m>-2$.故选 A.

9.D 【解析】由等比数列的性质,可得 $m+n=8$,$\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}(m+n)\left(\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{8}\left(10+\dfrac{m}{n}+\dfrac{9n}{m}\right)\geqslant\dfrac{1}{8}\left(10+2\sqrt{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{9n}{m}}\right)=2$,当且仅当 $m=6,n=2$ 时,等号成立,因此,$\dfrac{9}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为 2.故选 D.

10.B 【解析】$f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,结合图象,$f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$,$0\leqslant x\leqslant a$,$\dfrac{\pi}{3}\leqslant x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+a$,于是 $\pi\leqslant\dfrac{\pi}{3}+a\leqslant\dfrac{5\pi}{3}$,解得 $\dfrac{2\pi}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$,所以实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi\right]$.故选 B.

11.B 【解析】设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,令 $g(x)=x\cos x-\sin x$,$g'(x)=-x\sin x$,

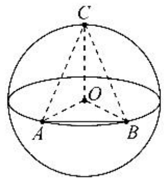
当 $x\in(0,\pi)$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递减,$g(x)<g(0)=0$,$\therefore f'(x)<0$,故 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上递减,$\because 0<2<3<\pi$.

$\therefore f(3)<f(2)$,$\dfrac{\sin 3}{3}<\dfrac{\sin 2}{2}$,$2\sin 3<3\sin 2$,故 $c<b$,

$0<1<\pi-2<\pi$,$\dfrac{\sin(\pi-2)}{\pi-2}<\sin 1$,$\sin 2<(\pi-2)\sin 1$,$3\sin 2<3(\pi-2)\sin 1<4\sin 1$,故 $b<a$,

故 $c<b<a$,故选 B.

12.C 【解析】如图所示,当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时,三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大,设球 O 的半径为 R,此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\dfrac{\sqrt{3}}{12}R^3=6$,故 $R^3=24\sqrt{3}$,则球 O 的体积为 $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$,故选 C.

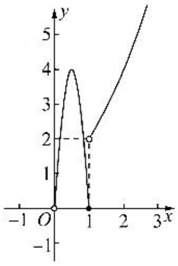


13.$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $(1,k)\cdot(1,\sqrt{3})=1+\sqrt{3}k=0$,$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14.18 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差分别为 a_1,d,则 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$,所以 S_n 可看成关于 n 的二次函数,由二次函数的对称性及 $S_{20}=S_{24}$,$S_m=S_{26}$,可得 $\dfrac{20+24}{2}=\dfrac{26+m}{2}$,解得 $m=18$.

15.④ 【解析】根据线面的位置关系易知,①②③中面 α 和面 β 可能相交也可能平行,④:若 $m\perp\alpha$ 且 $m\perp\beta$,根据面面平行的判定可知垂直于同一直线的两平面互相平行,故④正确.

16.$(-3,-1)$ 【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，



令 $t=f(x)$，则 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 可化为 $t^2-(2-m)t+1-m=(t-1+m)(t-1)=0$，

则 $t_1=1$ 或 $t_2=1-m$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数之和为 5 个，由图可得函数 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$ 的交点个数为 2，所以 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_2$ 的交点个数为 3 个，即此时 $2<1-m<4$，解得 $-3<m<-1$.

17.【解析】

(1)在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=\log_2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，…… 1 分

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，…… 2 分

即 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=2$，公比为 2 的等比数列，…… 3 分

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 4 分

(2)由 $(3n-2)a_n=(3n-2)\times2^n$，

故 $S_n=1\times2+4\times2^2+7\times2^3+\cdots+(3n-5)\times2^{n-1}+(3n-2)\times2^n$，…… 6 分

所以 $2S_n=1\times2^2+4\times2^3+7\times2^4+\cdots+(3n-5)\times2^n+(3n-2)\times2^{n+1}$，…… 7 分

则 $-S_n=2+3\times[2^2+2^3+\cdots+2^n]-(3n-2)\times2^{n+1}$，…… 9 分

$=-4+3\times\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-(3n-2)\times2^{n+1}=-10+(5-3n)\cdot2^{n+1}$，…… 11 分

故 $S_n=10+(3n-5)\cdot2^{n+1}$. …… 12 分

18.【解析】(1)解法一：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$\sin 2B=\sin A\cos A+\sin C\cos C$，…… 1 分

$C=\dfrac{\pi}{4}$，$A+B+C=\pi$，$\sin 2B=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2A\right)=-\cos 2A$，…… 2 分

所以 $-\cos 2A=\sin A\cos A+\dfrac{1}{2}$，…… 3 分

$\sin^2A-\cos^2A-\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}$，…… 4 分

$\dfrac{\tan^2A-1-\tan A}{\tan^2A+1}=\dfrac{1}{2}$，化简得 $\tan^2A-2\tan A-3=0$，…… 5 分

解得 $\tan A=3$ 或 $\tan A=-1$(舍去). …… 6 分

解法二：由题，$a\cos A+c\cos C=2b\cos B$，

由正弦定理得，$2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C$，…… 1 分

即 $2\sin 2B=\sin[(A+C)+(A-C)]+\sin[(A+C)-(A-C)]$，…… 2 分

即 $\sin 2B=\sin(A+C)\cos(A-C)$，…… 3 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\sin(A+C)=\sin B$，

所以 $2\sin B\cos B=\sin B\cos(A-C)$，

又 $0<B<\pi$，故 $\sin B\neq0$，

所以 $2\cos B=\cos(A-C)$，…… 4 分

又 $A+B+C=\pi$，故 $\cos B=-\cos(A+C)$，

化简得 $\sin A\sin C=3\cos A\cos C$，…… 5分

因此 $\tan A\tan C=3$ 且 $\tan C=1$，

所以 $\tan A=3$. …… 6分

(2)由(1)知 $\tan A=3$，

因此 $\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=2$，…… 7分

所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，…… 8分

$\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，…… 9分

$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，…… 10分

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$a=6$，…… 11分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=12$. …… 12分

19.【解析】(1)因为 $PB=PC$，O 是 BC 的中点，所以 $PO\perp BC$，…… 1分

在直角 $\triangle POC$ 中，$PC=\sqrt{3}$，$OC=1$，所以 $PO=\sqrt{2}$，…… 2分

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，所以 $DO=\sqrt{2}$，…… 3分

又因为 $PD=2$，所以在 $\triangle POD$ 中，$PD^2=PO^2+OD^2$，即 $PO\perp OD$. …… 4分

而 $BC\cap OD=O$，$BC,OD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，…… 5分

而 $PO\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$. …… 6分

(2)由(1)平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$，且 $DC\perp BC$，所以 $DC\perp$ 平面 PBC，

所以 $DC\perp PC$，即 $\triangle PCD$ 是直角三角形，…… 8分

因为 $PC=\sqrt{3}$，$CD=1$，所以 $S_{\triangle PDC}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…… 9分

又知 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$，…… 10分

$PO\perp$ 平面 $ABCD$，设点 A 到平面 PCD 的距离为 d，

则 $V_{A-PCD}=V_{P-ACD}$，

即 $\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PCD}\times d=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ACD}\times PO$，…… 11分

即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times d=\dfrac{1}{3}\times1\times\sqrt{2}$，

所以 $d=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以点 A 到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. …… 12分

20.【解析】(1)由题当 $n=1$ 时，$2a_1=(2-3)\cdot2^{1+1}+6=2$，即 $a_1=1$. …… 1分

$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$①

当 $n\geqslant2$ 时，$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=(2n-5)\cdot2^n+6$②. …… 3分

①−②得 $2^na_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6-(2n-5)\cdot2^n-6=(2n-1)\cdot2^n$，…… 5分

所以 $a_n=2n-1$. …… 6分

(2)由(1)知，$b_n=2^{a_n}+a_n=2^{2n-1}+2n-1$，

则 $T_n=(2+1)+(2^3+3)+(2^5+5)+\cdots+(2^{2n-1}+2n-1)$ …… 8分

$=(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$ …… 10分

$=\frac{2\times(1-4^n)}{1-4}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{2^{2n+1}+3n^2-2}{3}$. ………… 12分

21.【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x+x$，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}+1$， ………… 1分

所以 $f(1)=2$，$f'(1)=1$， ………… 2分

则切线方程为 $y-2=1\times(x-1)$， ………… 3分

即 $x-y+1=0$. ………… 4分

曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$. ………… 5分

(2)证明：要证 $f(x)>x+2$，即证 $e^{x-a}-\ln x>2$，

设 $F(x)=e^{x-a}-\ln x$，$x>0$，

即证 $F(x)>2$， ………… 6分

当 $a\leqslant 0$ 时，$F(x)=e^{x-a}-\ln x$，$F'(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x}=\frac{xe^{x-a}-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数， ………… 7分

且 $h(x)=xe^{x-a}-1$ 中，$h(0)=0\times e^{0-a}-1=-1<0$，$h(1)=e^{1-a}-1>e-1>0$. ………… 8分

故 $F'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(0,1)$. ………… 9分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$F(x)$ 取得最小值. ………… 10分

由 $F'(x_0)=0$，得 $e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$， ………… 11分

故 $F(x)\geqslant F(x_0)=e^{x_0-a}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0-a>2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-a\geqslant 2$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$F(x)>2$ 即 $f(x)>x+2$. ………… 12分

22.【解析】(1)由题 $\begin{cases}x=2a+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)，消去参数 t 得直线 l：$x-\sqrt{3}y-2a=0$， ………… 2分

$\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$，即 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$，即曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………… 5分

(2)由 $\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\ y'=y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2x',\\ y=y',\end{cases}$ 又 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，所以 $\frac{(2x')^2}{4}+(y')^2=1$，即 $x'^2+y'^2=1$，

所以曲线 C' 的方程是 $x^2+y^2=1$， ………… 8分

由 $d=\frac{|-2a|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant a\leqslant 1$.

所以 a 的取值范围是 $[-1,1]$. ………… 10分

23.【解析】(1)$f(x)=|x+2|+2|x-t|=|x+2|+|x-t|+|x-t|$，

$y=|x+2|+|x-t|\geqslant|x+2-(x-t)|=|2+t|=2+t$，当 $-2\leqslant x\leqslant t$ 时等号成立， ………… 3分

又知当 $x=t$ 时，$|x-t|$ 取得最小值，所以当 $x=t$ 时，$f(x)$ 有最小值，

此时 $f(x)_{\min}=f(t)=t+2=5$，

所以 $t=3$. ………… 5分

(2)由(1)知，$2a+b+c=3$，

$\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{2}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=\frac{1}{3}(1+2+1)^2=\frac{16}{3}$， ………… 8分

当且仅当 $a=\frac{3}{8}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=\frac{3}{4}$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$. ………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。