沈阳市第 120 中学 2022-2023 学年度下学期

高二年级期末质量监测　　数学试题答案

一、单选题

CBABA　ACB

二、多选题

9. BC；　10．ABC；　11．AD；　12．ACD

三、填空题

13．$(-1,1]\cup[2,3)$　14．$(-4,-2)$　15．$(-\infty,-4]$　16．18

四、解答题

17.【详解】(1) 当 $a=0$ 时，由 $-3x+2=0$，解得 $x=\frac{2}{3}$，满足题意，因此 $a=0$；

当 $a\neq 0$ 时，$\because A$ 中至多有一个元素，$\therefore \Delta=9-8a\leq 0$，解得 $a\geq\frac{9}{8}$.

故综上可得：a 的取值范围是 $\{0\}\cup\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$.　………………5 分

(2) 当 $a=0$ 时，由 $-3x+2=0$，解得 $x=\frac{2}{3}$，满足题意，因此 $a=0$；

当 $a\neq 0$ 时，$\because A$ 中至少有一个元素，$\therefore \Delta=9-8a\geq 0$，解得 $a\leq\frac{9}{8}$.

故综上可得：a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$.　………………10 分

18.【详解】(1) 由 $a_{n+1}=3a_n+1-2n$ 可得，$a_{n+1}-n-1=3a_n+1-2n-n-1=3\left(a_n-n\right)$，

又 $a_1-1=1\neq 0$，故 $\{a_n-n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列，即 $\lambda=1$，$a_n-n=3^{n-1}$，

于是 $a_n=3^{n-1}+n$　………………6 分

(2) 由 (1) 知，$b_n=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，于是 $T_n=1\times\frac{1}{3^0}+3\times\frac{1}{3^1}+5\times\frac{1}{3^2}\cdots+(2n-3)\times\frac{1}{3^{n-2}}+(2n-1)\times\frac{1}{3^{n-1}}$，

则 $\frac{1}{3}T_n=1\times\frac{1}{3^1}+3\times\frac{1}{3^2}+5\times\frac{1}{3^3}\cdots+(2n-3)\times\frac{1}{3^{n-1}}+(2n-1)\times\frac{1}{3^n}$，

两式相减：$\frac{2T_n}{3}=1+2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{3^n}=1+2\times\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{1}{3^{n-1}}\frac{2n-1}{3^n}$，

即 $\frac{2T_n}{3}=2-\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$，于是 $T_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$，故 $T_n<3$.　………………12 分

19.【详解】（1）若 $f\left(x\right)<0$ 的解集为$\left(\frac{1}{2},1\right)$，则$\frac{1}{2}$和 1 是 $ax^2-\left(a+1\right)x+1=0$ 的两个根，

则$\begin{cases}\frac{1}{2}+1=\frac{a+1}{a}\\ \frac{1}{2}\times1=\frac{1}{a}\end{cases}$，解得 $a=2$；　　　　　　　　　　　　　　………………2 分

（2）由 $f\left(x\right)>0$ 得 $ax^2-\left(a+1\right)x+1>0$，即$\left(ax-1\right)\left(x-1\right)>0$，

当$\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\middle|x<1\text{或}x>\frac{1}{a}\right\}$；

当$\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，不等式可化为$\left(x-1\right)^2>0$，不等式的解集为$\left\{x\middle|x\neq1\right\}$；

当$0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{或}x>1\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式化为 x-1<0，不等式的解集为$\{x|x<1\}$

当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$

综上：当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\middle|x<1\text{或}x>\frac{1}{a}\right\}$；

当 $a=1$ 时，不等式解集为$\left\{x\middle|x\neq1\right\}$；

当 $a>1$ 时，不等式的解集为$\left\{x\middle|x<1\text{或}x>\frac{1}{a}\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式化为 x-1<0，不等式的解集为$\{x|x<1\}$

当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$.　　　　………………12 分（共 5 步，每步 2 分）

20.【详解】（1）当 $a=2,b=-2$ 时，$f\left(x\right)=2x^2-x-4$，

∴ 由 $f(x)=x$ 得 $x^2-x-2=0$，∴$x=-1$ 或 $x=2$. ∴$f(x)$的不动点为$-1,2$.　　　　………………2 分

（2）当 $a=2$ 时，$f\left(x\right)=2x^2+\left(b+1\right)x+b-2$，

由题意得 $f(x)=x$ 在$\left(-2,3\right)$内有两个不同的不动点，

即方程 $2x^2+bx+b-2=0$ 在$\left(-2,3\right)$内的两个不相等的实数根.

设 $g\left(x\right)=2x^2+bx+b-2$，

∴只须满足$\begin{cases}g\left(-2\right)=8-2b+b-2>0\\ g\left(3\right)=18+3b+b-2>0\\ -2<-\frac{b}{4}<3\\ b^2-8\left(b-2\right)>0\end{cases}$，∴$\begin{cases}b<6\\ b>-4\\ -12<b<8\\ b\neq4\end{cases}$

$\therefore -4<b<4$ 或 $4<b<6$. ··················8 分

（3）由题意得:对于任意实数 b,方程 $ax^2+bx+b-2=0$ 总有两个不相等的实数解.

$\therefore \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=b^2-4a(b-2)>0 \end{cases}$ $\therefore b^2-4ab+8a>0$ 对 $b\in\mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore 16a^2-32a<0$，$\therefore 0<a<2$. ··················12 分

21．解：(1) $\because f(x)=\frac{a\cdot 4^x-1}{4^x+1}$是定义在$R$上的奇函数，

$\therefore f(0)=0$，从而得出$a=1$，

$a=1$ 时，$f(x)+f(-x)=\frac{4^x-1}{4^x+1}+\frac{4^{-x}-1}{4^{-x}+1}=\frac{4^x-1}{4^x+1}+\frac{\frac{1}{4^x}-1}{\frac{1}{4^x}+1}=\frac{4^x-1}{4^x+1}+\frac{1-4^x}{1+4^x}=0$，

$\therefore a=1$； ··················2 分

(2)$f(x)$是R上的增函数，证明如下：

设任意$x_1,x_2\in R$且$x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=(1-\frac{2}{4^{x_1}+1})-(1-\frac{2}{4^{x_2}+1})$

$=\frac{2}{4^{x_2}+1}-\frac{2}{4^{x_1}+1}=\frac{2(4^{x_1}-4^{x_2})}{(4^{x_2}+1)(4^{x_1}+1)}$，$\because x_1<x_2$, $\therefore 4^{x_1}<4^{x_2}$, $4^{x_1}+1>0$, $4^{x_2}+1>0$,

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，$\therefore f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上的单调增函数.

$\because f(x^2-2x)+f(3x-2)<0$，

又$\because f(x)$是定义在R上的奇函数且在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x^2-2x)<f(2-3x)$，$\therefore x^2-2x<2-3x$，$\therefore -2<x<1$； ··················8 分

(3)假设存在实数k，使之满足题意，

由(2)可得函数$f(x)$在$[m,n]$上单调递增，$\therefore \begin{cases} f(m)=\frac{k}{4^m} \\ f(n)=\frac{k}{4^n} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \frac{4^m-1}{4^m+1}=\frac{k}{4^m} \\ \frac{4^n-1}{4^n+1}=\frac{k}{4^n} \end{cases}$，

$\therefore m,n$为方程$\frac{4^x-1}{4^x+1}=\frac{k}{4^x}$的两个根，即方程$\frac{4^x-1}{4^x+1}=\frac{k}{4^x}$有两个不等的实根，

令$4^x=t>0$，即方程$t^2-(1+k)t-k=0$ 有两个不等的正根，

$\therefore \begin{cases} \frac{1+k}{2}>0 \\ \Delta>0 \\ -k>0 \end{cases}$，$\therefore -3+2\sqrt{2}<k<0$. $\therefore$存在实数k,使得函数$f(x)$在$[m,n]$上的取值范围是$\left[\frac{k}{4^m},\frac{k}{4^n}\right]$，

并且实数k的取值范围是$(-3+2\sqrt{2},0)$. ··················12 分

22.【解】（1）函数的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}+a\right)$，

若 $f(x)$ 是增函数，即 $f'(x)\geq 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，故 $\ln x+\dfrac{1}{x}+a\geq 0$ 恒成立，

设 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+a$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=a+1$，由 $a+1\geq 0$ 得 $a\geq -1$，

所以 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$. ………………6 分

（2）不妨设 $0<x_1<x_2$，因为 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，

所以 $f'(x_1)=e^{x_1}\left(\ln x_1+\dfrac{1}{x_1}+a\right)=0$，即 $\ln x_1+\dfrac{1}{x_1}+a=0$，同理 $\ln x_2+\dfrac{1}{x_2}+a=0$，

故 x_1，x_2 是函数 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+a$ 的两个零点，即 $g(x_1)=g(x_2)=0$，

由（1）知，$g(x)_{\min}=g(1)=a+1<0$，故应有 $a\in(-\infty,-1)$，且 $0<x_1<1<x_2$，

要证明 $x_1+x_2>2$，只需证 $x_2>2-x_1$，

只需证 $g(x_2)-g(2-x_1)=g(x_1)-g(2-x_1)$

$$=\ln x_1+\frac{1}{x_1}+a-\left[\ln(2-x_1)+\frac{1}{2-x_1}+a\right]=\ln x_1+\frac{1}{x_1}-\ln(2-x_1)+\frac{1}{x_1-2}>0,$$

设 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-\ln(2-x)+\dfrac{1}{x-2}$，$x\in(0,1)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x-1}{x^2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}=-\dfrac{4(x-1)^2}{x^2(x-2)^2}\leq 0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，因为 $x_1\in(0,1)$，所以 $h(x_1)>h(1)=0$，

即 $g(x_2)-g(2-x_1)>0$，$g(x_2)>g(2-x_1)$，

又 $x_2>1$，$2-x_1>1$，及 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2>2-x_1$ 成立，即 $x_1+x_2>2$ 成立. ………………12 分