2023 年哈三中高三学年
第三次高考模拟考试数学试卷

考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分

注意事项:

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、座位号填写在答题卡上.

2. 作答时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题（共 60 分）

（一）单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 命题：“$\forall x\in[1,2]$，$2x^2-3\ge 0$”的否定是

A. $\forall x\notin[1,2]$，$2x^2-3\ge 0$　　B. $\forall x\in[1,2]$ $2x^2-3<0$

C. $\exists x_0\in[1,2]$，$2{x_0}^2-3<0$　　D. $\exists x_0\notin[1,2]$，$2{x_0}^2-3<0$

2. 设全集$U=R$，$A=\left\{x\,|\,\frac{1}{9}<\frac{1}{3^x}\le\frac{1}{3}\right\}$，$B=\left\{x\,|\,y=\log_2\left(-x^2+3x-2\right)\right\}$，则下列说法正确的是

A. $A\cap B=A$　　B. $B\subseteq A$

C. $(C_UA)\cup B=U$　　D. $(C_UB)\cap A=\phi$

3. 若复数$z=\left(m^2+m-6\right)+\left(m^2-m-2\right)\mathrm{i}$，当$z$是纯虚数时，实数$m$值为

A. - 1或2　　B. 2或- 3　　C. 2　　D. - 3

4. 已知$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式不一定成立的是

A. $a>b$　　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　C. $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$　　D. $\log_{(-b)}(-a)\ge 0$

5. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,\cos\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sin\alpha)$，且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=$

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $-\dfrac{3}{2}$

6. 某职业体验活动共设置五个职业，五位同学各选其中一个职业，若至少选出四个职业，活动才能正常进行，则不同的选择方案共有

A. 1320种　　B. 1200种　　C. 325种　　D. 600种

7. 海面上有相距4公里的A，B两个小岛，B在A的正东方向，为守护小岛，一艘船绕两岛航行，已知这艘船到两个小岛距离之和为6公里.在B岛的北偏西$\theta\left(\tan\theta=\dfrac{1}{2},\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})\right)$处有一个信号站$P$，$B$岛到信号站$P$的距离为$2\sqrt{5}$公里.若这艘船航行的过程中一直能接收到信号站$P$发出的信号，则信号站$P$的信号传播距离至少为

A. $(4+\sqrt{3})$公里　　B. 5公里　　C. $\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$公里　　D. $(4+\sqrt{5})$公里

8. 英国数学家泰勒1712年提出了泰勒公式，这个公式是高等数学中非常重要的内容之一.其正弦展开的形式如下：$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，(其中$x\in R$，$n\in N^*$)，则$1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-2)!}+\cdots$的值约为（1弧度$\approx 57^\circ$）

A. $\sin 57^\circ$　　B. $\sin 33^\circ$　　C. $-\sin 33^\circ$　　D. $-\sin 57^\circ$

（二）多项选择题（共 4 小题，每小题 5 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 已知l，m，n为空间中三条不同的直线，α，β，γ为空间中三个不同的平面，则下列说法中正确的有

A. 若$\alpha\cap\beta=n$，$\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则$n\perp\gamma$

B. 若$\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，若$l\cap m=P$，则$P\in\alpha$

C. 若$\alpha\parallel\beta$，l，m分别与α，β所成的角相等，则$l\parallel m$

D. 若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$\alpha\parallel\gamma$，则$\beta\parallel\gamma$

10. 下列命题中正确的是

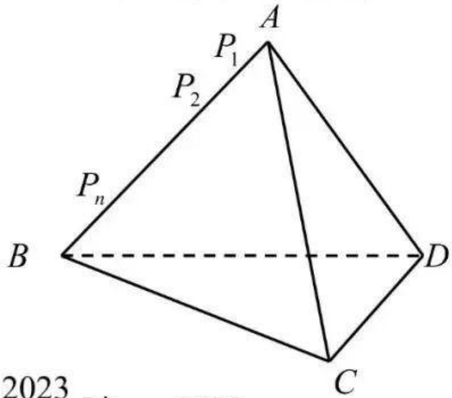
A. 已知随机变量$X\sim B(6,\frac{1}{3})$，则$D(3X+2)=12$

B. 已知随机变量$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P(Y\le 4)=P(Y\ge 0)$，则$\mu=2$

C. 已知一组数据：7，7，8，9，5，6，8，8，则这组数据的第 30 百分位数是 8

D. 抽取高三年级 50 名男生、50 名女生的二模数学成绩，男生平均分 123 分，方差为 60；女生平均分 128 分，方差为 40，则抽取的 100 名学生数学成绩的方差为80

11. 已知正四面体$ABCD$中，$AB=2$，P_1，P_2，…，P_n在线段AB上，且$|AP_1|=|P_1P_2|=\cdots=|P_{n-1}P_n|=|P_nB|$，过点$P_1$作平行于直线$AC$，$BD$的平面，截面面积记为$a_n$，则下列说法正确的是



A. $a_1=1$　　B. $\{a_n\}$为递减数列

C. 存在常数m，使$\left\{\frac{1}{a_n}+m\right\}$为等差数列

D. 设S_n为数列$\left\{\frac{n+1}{n^2}a_n\right\}$的前$n$项和，则$S_n=\frac{2023}{506}$时，$n=2023$

12. 已知奇函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(1-x)-f(1+x)+2x=0$ 恒成立，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 在 $[1,2]$ 单调递减

B. $f(2)=2$

C. $f(2024)=2024$

D. $f'(2023)=1$

二、填空题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 上有且只有三个点到直线 $l:ax+2y+1=0$ 的距离为 1，则 $a=$________.

14. 已知实数 x，y 满足 $\ln\sqrt{2y+1}+y=2$，$e^x+x=5$，则 $x+2y=$________.

15. 小明有两盒中性笔，每盒都有 8 支（材质，外观完全相同）笔，他每次都在两盒中性笔中随机选取一盒，并从此盒中抽出一支笔使用，则他发现一盒笔用完时，另一盒恰还有 5 支笔的概率为________.

16. 双曲线的中心为原点 O，焦点在 y 轴上，F_1，F_2 分别是双曲线的两个焦点，过上焦点 F_2 作斜率 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 交双曲线上支于点 M,N .若 ΔMF_1F_2，ΔNF_1F_2 的内心分别是 P,Q，且 $|MN|=2\sqrt{3}|PQ|$，则双曲线的离心率为__________.

三、解答题：（共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本题满分 10 分）

已知数$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$，$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$．

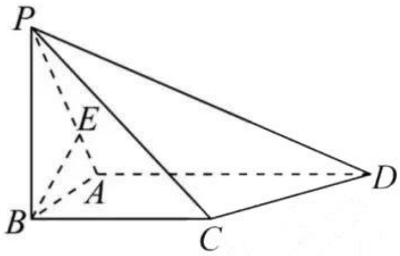
(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项和S_n；

(2) 若$b_n=\dfrac{2S_n}{n}+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

18. （本题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，$AB\perp BC$，$AD\parallel BC$，

$AD=3$，$PA=BC=2AB=2$，$PB=\sqrt{3}$．



(1) 求证：$BC\perp PB$；

(2) 若点E为棱PA上不与端点重合的动点，且CE与平面PAB所成角正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求E点到平面PCD的距离.

19. （本题满分 12 分）

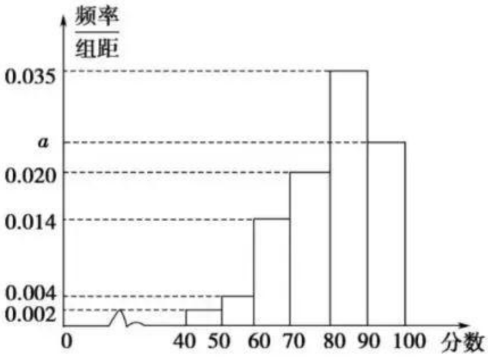
$\triangle ABC$中，a,b,c分别为角A,B,C的对边，且$b+c=2a\sin(C+\dfrac{\pi}{6})$

(1) 求角A；

(2) 若$\triangle ABC$的内切圆面积为π，求$\triangle ABC$的面积S的最小值.

20. （本题满分 12 分）

2023 年 3 月，某校举行政教主任副职竞聘选举，为了解学生对竞聘结果的满意度，评分 70 分以下为不满意，70 分及以上为满意，从高三学年抽取 100 名学生进行评分(满分100 分)，绘制如下频率分布直方图，并将分数从低到高分为两个等级：



性别	满意度		合计
	不满意	满意	
男生			
女生			
合计			

(1) 求频率分布直方图中 a 的值及评分众数；

(2) 已知在不满意的学生中男生占比 $\frac{3}{4}$，满意的学生中女生占比 $\frac{7}{8}$，填写列联表；并根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否判断性别与满意度有关；

(3) 若按是否满意用比例分层随机抽样的方法从 100 名学生中抽取 10 人，现从抽取的 10 名学生中进行调研，每轮调研一人，调研视为不放回抽取，调研到不满意的学生就停止抽取，且第四轮抽取不管结果如何都停止抽取，记停止抽取时抽取轮数为 Y，求 Y 的数学期望.

附：临界值表

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$)

21. （本题满分 12 分）

已知抛物线的顶点在原点，焦点在 y 轴上，其上一点 $M(m,1)$ 到焦点的距离为 2.

(1) 求抛物线方程；

(2) 圆 $E:x^2+(y+1)^2=1$，过抛物线上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0\geq 2)$ 作圆 E 的两条切线与 x 轴交于 M 、N 两点，求 $S_{\triangle PMN}$ 的最小值.

22. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}-x-b$.

(1) 当 $b=1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围；

(2) 令 $b=0$，函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，当 a 变化时，若 $\lambda\ln x_1+\ln x_2$ 有最小值 e （e 为自然对数的底数），求常数 λ 的值.