# 宝安区 2023-2024 学年第一学期调研测试卷

## 高三　数学

2023.10

说明：本测试卷共 6 页，答题卡共 2 页。调研时间 120 分钟，满分 150 分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔或钢笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型填涂在答题卡上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的签字笔或钢笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回。

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 若集合 $A=\{x||2x-3|\le 1\}, B=\{x|-2<x<5, x\in N^*\}$，则 $A\cap B=$

A. $[1,2]$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{1,2\}$

2. 设 $iz+2\bar{z}=3$，$\bar{z}$ 是 $z$ 的共轭复数，则复数 $z=$

A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

3. 平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{11}$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影向量为

A. $(1,\sqrt{3})$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

4. 已知圆锥曲线 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\cos\theta}=1(0<\theta<\pi)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\theta=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}, 0<x<a,\\ \frac{\ln x}{x}, x\ge a,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $[1,e^2]$　　B. $[e,2e]$　　C. $[e,e^2]$　　D. $[e,+\infty)$

6. 已知过点 $P$ 与圆 $x^2+y^2-4y+1=0$ 相切的两条直线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，设过点 $P$ 与圆 $x^2+y^2-4y=0$ 相切的两条直线的夹角为 $\alpha$，则 $\sin\alpha=$

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

7. 设数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$.记命题$p$："数列$\{a_n\}$为等比数列"，命题$q$："$S_n$，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成等比数列"，则$p$是$q$的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 我国人脸识别技术处于世界领先地位.所谓人脸识别，就是利用计算机检测样本之间的相似度，余弦距离是检测相似度的常用方法.假设二维空间中有两个点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$O$为坐标原点，余弦相似度为向量$\overline{OA}$，$\overline{OB}$夹角的余弦值，记作$\cos(A,B)$，余弦距离为$1-\cos(A,B)$.已知$P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\sin\beta)$，$R(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，若$P$，$Q$的余弦距离为$\frac{1}{3}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{7}$，则$Q$，$R$的余弦距离为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{7}$

二、多选题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

9. 下列说法正确的有

A. 从40个个体中随机抽取一个容量为10的样本，则每个个体被抽到的概率都是0.25

B. 已知一组数据1，2，$m$，6，7的平均数为4，则这组数据的方差是5

C. 数据26，11，14，31，15，17，19，23的50%分位数是18

D. 若样本数据$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的标准差为4，则数据$2x_1+1$，$2x_2+1$，…，$2x_n+1$的标准差为16

10. 星等是衡量天体光度的量.为了衡量星星的明暗程度，古希腊天文学家喜帕恰斯（又名依巴谷）在公元前二世纪首先提出了星等这个概念，例如，1等星的星等值为1，$-0.46$等星的星等值为$-0.46$.已知两个天体的星等值$m_1$，$m_2$和它们对应的亮度$E_1$，$E_2$满足关系式$m_2-m_1=-2.5\lg\frac{E_2}{E_1}(E_1>0,E_2>0)$，关于星等下列结论正确的是

A. 星等值越小，星星就越亮

B. 1等星的亮度恰好是6等星的100倍

C. 若星体甲与星体乙的星等值的差小于2.5，则星体甲与星体乙的亮度的比值小于$10^{-1}$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，$f(1)=\sqrt{3}$，$f\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ 为偶函数，则

A. $f(x)$ 为偶函数　　　　B. $f(2)=\sqrt{3}$

C. $f(3+x)=-f(3-x)$　　　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=\sqrt{3}$

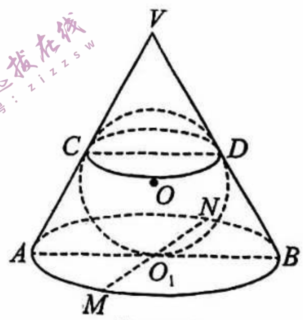
12. 如图，圆锥 $VAB$ 内有一个内切球 $O$，球 $O$ 与母线 $VA,VB$ 分别切于点 $C,D$. 若 $\triangle VAB$ 是边长为 2 的等边三角形，$O_1$ 为圆锥底面圆的中心，$MN$ 为圆 $O_1$ 的一条直径（$MN$ 与 $AB$ 不重合），则下列说法正确的是

A. 球的表面积与圆锥的侧面积之比为 2∶3

B. 平面 $CMN$ 截得圆锥侧面的交线形状为抛物线

C. 四面体 $CDMN$ 的体积的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

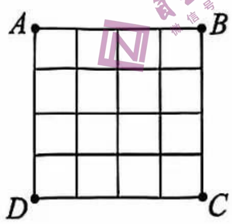
D. 若 $P$ 为球面和圆锥侧面的交线上一点，则 $PM+PN$ 最大值为 $2\sqrt{2}$



第 12 题图

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 将一些小于 10 的正整数填入如下 4×4 的方格 $ABCD$ 中，使得每行和每列中的数的乘积都等于 10，共有________种不同的填法.



第 13 题图

14．中国客家博物馆坐落于有“世界客都”之称的广东省梅州市城区，是一间收藏、研究、展示客家历史文化的综合性博物馆，其主馆是一座圆台形建筑，如图.现有一圆台，其上、下底面圆的半径分别为 3 米和 6 米，母线长为 5 米，则该圆台的体积约为__________立方米.（结果保留整数）

第 14 题图

15．先将函数 $f(x)=\cos x$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$，纵坐标不变，所得图象与函数 $g(x)$ 的图象关于 $x$ 轴对称，若函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上恰有两个零点，且在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，则 $\omega$ 的取值范围是________.

16．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，底面 $ABCD$ 内（含边界）的动点 $P$ 到直线 $CC_1$ 的距离与到平面 $ADD_1A_1$ 的距离相等，则三棱锥 $P-AB_1D_1$ 体积的取值范围为________.

## 四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）

17．（10 分）$\triangle ABC$ 的角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$.

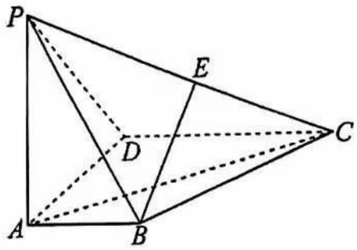
（1）若 $a=2\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长；

（2）设 $D$ 为 $AC$ 中点，求 $A$ 到 $BD$ 距离的最大值.

18. （12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD\perp AB$，$AB\parallel DC$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，点 $E$ 为棱 $PC$ 的中点，$AD=DC=AP=2AB=2$．

（1）证明：$BE//$ 平面 $PAD$；

（2）在棱 $PC$ 上是否存在点 $F$，使得二面角 $F-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，若存在，求出 $\frac{PF}{PC}$ 的值，若不存在，请说明理由．



第 18 题图

19. （12 分）已知函数 $f(x)=a(\ln x+a)-x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\le 2a^2-2a$．

20. （12 分）给定数列 $\{a_n\}$，若满足 $a_1=a$（$a>0$ 且 $a\ne 1$），且对于任意的 $m,n\in N^*$，都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“指数型数列”．

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=4^n$，证明：$\{a_n\}$ 为“指数型数列”；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}\ (n\in N^*)$；

①判断数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是否为“指数型数列”，若是给出证明，若不是说明理由；

②若数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，证明：$S_n<\frac{3}{4}$．

21. （12 分）人口老龄化加剧的背景下，我国先后颁布了一系列生育政策，根据不同政策要求，分为两个时期 Ⅰ 和 Ⅱ．根据部分调查数据总结出如下规律：对于同一个家庭，在 Ⅰ 时期内生孩 $X$ 人，在 Ⅱ 时期生孩 $Y$ 人，（不考虑多胞胎）生男生女的概率相等．$X$ 服从 0-1 分布且 $P(X=0)=\frac{1}{5}$．$Y$ 分布列如下图：

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $p+q$ | $p-q$ |

现已知一个家庭在 Ⅰ 时期没生孩子，则在 Ⅱ 时期生 2 个孩子概率为$\frac{1}{24}$；若在 Ⅰ 时期生了 1 个女孩，则在 Ⅱ 时期生 2 个孩子概率为$\frac{1}{6}$；若在 Ⅰ 时期生了 1 个男孩，则在 Ⅱ 时期生 2 个孩子概率为$\frac{1}{12}$，样本点中 Ⅰ 时期生孩人数与 Ⅱ 时期生孩人数之比为$2:5$（针对普遍家庭）．

（1）求$Y$的期望与方差；

（2）由数据$z_i(i=1,2,\cdots,n)$组成的样本空间根据分层随机抽样分为两层，样本点之比为$a:b$，分别为$x_i(i=1,2,\cdots,k)$与$y_i(i=1,2,\cdots,m)$，$k+m=n$，总体样本点与两个分层样本点均值分别为$\overline{z}$，$\overline{x}$，$\overline{y}$，方差分别为$S_0^2$，$S_1^2$，$S_2^2$，证明：

$S_0^2=\frac{a}{a+b}\left[S_1^2+(\overline{x}-\overline{z})^2\right]+\frac{b}{a+b}\left[S_2^2+(\overline{y}-\overline{z})^2\right]$，并利用该公式估算题设样本总体的方差．

22．（12 分）已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，两焦点与短轴两顶点围成的四边形的面积为$4\sqrt{2}$．

（1）求椭圆 $C$ 的标准方程；

（2）我们称圆心在椭圆 $C$ 上运动，半径为$\frac{a}{2}$的圆是椭圆 $C$ 的“卫星圆”，过原点 $O$ 作椭圆 $C$ 的“卫星圆”的两条切线，分别交椭圆 $C$ 于 $A$，$B$ 两点，若直线 $OA$，$OB$ 的斜率存在，记为$k_1$，$k_2$．

①求证：$k_1k_2$为定值；

②试问$|OA|^2+|OB|^2$是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由．