宁波市2022学年第二学期期末九校联考高一数学参考答案

单项选择题

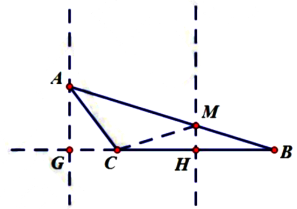
1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	C	C	D	B	A	C

8．解析：因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{-1}{2}\left(|PA||PM|+|PM||PC|+|PA||PC|\right)$，

$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\left(|PA||PM|+|PM||PC|+|PA||PC|\right)\sin120^\circ$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{-2}{\sqrt{3}}S_{\triangle AMC}$。

下求 $S_{\triangle AMC}$ 的值：



方法一：因为 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$，所以 $\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

设 $CM=MB=x$，则 $x^2=x^2+4-\frac{10\sqrt{7}}{7}x$

因此解得 $x=\frac{2}{5}\sqrt{7}$，故 $S_{\triangle AMC}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

方法二：如图所示分别过 A 和 H 作 BC 的垂线，故 $\Delta MHB\backsim\Delta AGB$，又因为 $GC=\frac{1}{2}$，故 $\frac{AM}{AB}=\frac{GH}{GB}=\frac{3}{5}$，故 $S_{\triangle AMC}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

方法三：以 C 为坐标原点建系，易得 $l_{AB}:y=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-2)$，故 $M(1,\frac{\sqrt{3}}{5})$. 又 $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，故 $S_{\triangle AMC}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\frac{3}{5}$，故选 C。

多项选择题

9	10	11	12
BC	ABD	BCD	AD

12．解析：法一）

（1）因为 $a_{n+1}a_n=\frac{a_n-3}{a_{n+1}-4}a_n^2\ge0$，A 正确；

（2）记函数 $f(x)=x^2-4x$，

由 $a_{n+1}^2-4a_{n+1}=a_n^2-4\times(\frac{3}{4}a_n)\ge(\frac{3}{4}a_n)^2-4\times(\frac{3}{4}a_n)$ 得 $f(a_{n+1})\ge f(\frac{3}{4}a_n)$，

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，

所以对于任意正整数 n，$a_{n+1}\le\frac{3}{4}a_n$，排除 B；

（3）由（1）知所有 a_n 同号，

①当 $a_1=0$ 时，易得对于任意正整数 n，$a_n=0$，

②当 $0<a_1<2$ 时，$0<a_n<2$，$a_{n+1}^2-4a_{n+1}=a_n^2-3a_n>a_n^2-4a_n$ 即 $f(a_{n+1})>f(a_n)$，

由单调性知对于任意正整数 n，$a_{n+1}<a_n$，

③当 $a_1<0$ 时，$a_n<0$，$a_{n+1}^2-4a_{n+1}=a_n^2-3a_n<a_n^2-4a_n$ 即 $f(a_{n+1})<f(a_n)$，

由单调性知对于任意正整数 n，$a_{n+1}>a_n$，排除 C；

（4）由（2）知对于任意正整数 n，$a_{n+1}<\frac{3}{4}a_n$，

当 $a_1=1$ 时，$a_n\le(\frac{3}{4})^{n-1}$，进而 $S_{2022}\le\sum\limits_{k=1}^{2022}(\frac{3}{4})^{k-1}<4$；

由（3）②知当 $a_1=1$ 时，$0<a_n\le1$，计算得 $a_2=2-\sqrt{2}>\frac{1}{2}$，所以 $S_{2022}>S_2>\frac{3}{2}$。

另证：此时 $a_{n+1}^2-4a_{n+1}=a_n^2-3a_n<(\frac{1}{2}a_n)^2-4\times(\frac{1}{2}a_n)$，即 $f(a_{n+1})<f(\frac{1}{2}a_n)$，

由单调性知对于任意正整数 n，$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$，

故而 $a_n\ge(\frac{1}{2})^{n-1}$，进而 $S_{2022}\ge\sum\limits_{k=1}^{2022}(\frac{1}{2})^{k-1}>\frac{3}{2}$．故选 AD.

法二）由题意可知 (a_n,a_{n+1}) 在双曲线的下支 $\Gamma: y^2-4y=x^2-3x$，$(y<2)$ 上，

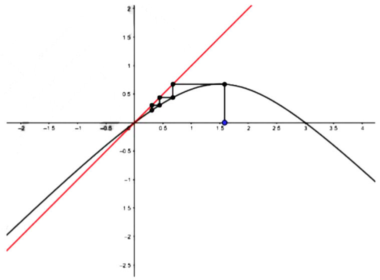
曲线 Γ 与直线 $y=x$ 有且仅有一个交点 $(0,0)$．

由蛛网法易得，

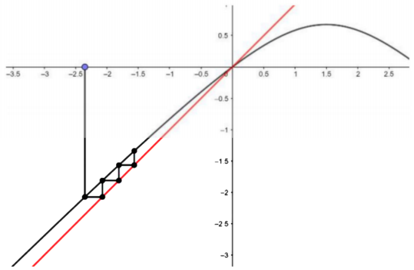
（1）由于交点 $(0,0)$ 的限制，a_{n+1},a_n 同号，所以 A 正确；

（2）①当 $a_1=0$ 时，$a_n=0$，

②当 $0<a_1<2$ 时，$a_{n+1}<a_n$，如图所示，

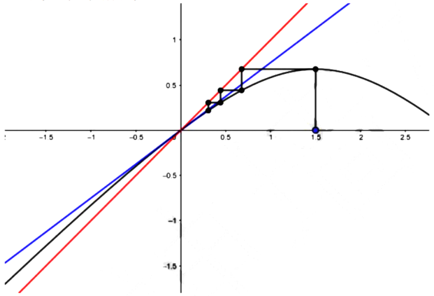


③当 $a_1<0$ 时，$a_{n+1}>a_n$，如图所示，



（3）计算可知，曲线Γ在$(0,0)$处的切线是$y=\dfrac{3}{4}x$（蓝色直线），

因为曲线Γ是上凸的，如图所示，

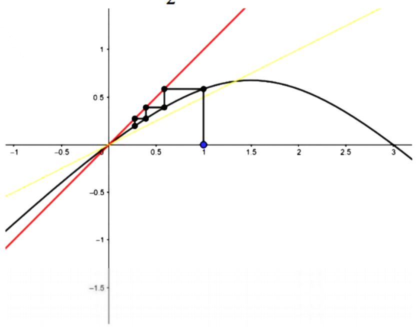


所以曲线Γ在切线$y=\dfrac{3}{4}x$下方，即对于任意正整数n，$a_{n+1}<\dfrac{3}{4}a_n$；

（4）当$a_1=1$时，$0<a_n\le 1$，$a_n\le(\dfrac{3}{4})^{n-1}$，进而$S_{2022}\le\sum\limits_{k=1}^{2022}(\dfrac{3}{4})^{k-1}<4$；

进一步易得，直线$y=\dfrac{1}{2}x$（黄色直线）是曲线Γ的一条割线，

且当$0<x\le 1$时，曲线Γ在割线$y=\dfrac{1}{2}x$的上方，如图所示，



即对于任意正整数 n，$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$，故而 $a_n\ge(\frac{1}{2})^{n-1}$，进而 $S_{2022}\ge\sum_{k=1}^{2022}(\frac{1}{2})^{k-1}>\frac{3}{2}$．

填空题

13．答案：$12\sqrt{2}$

14．答案：1

解析：等差中项法）$\dfrac{\cos a_5+\cos a_7}{\cos a_6}=\dfrac{\cos(a_6-d)+\cos(a_6+d)}{\cos a_6}=2\cos d=1$；

直接代入法）$\dfrac{\cos a_5+\cos a_7}{\cos a_6}=\dfrac{\cos(8-\pi)+\cos(8-\frac{\pi}{3})}{\cos(8-\frac{2\pi}{3})}=\dfrac{-\cos 8+\frac{1}{2}\cos 8+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 8}{-\frac{1}{2}\cos 8+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 8}=1$．

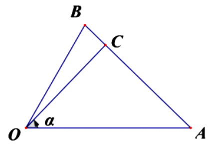
15．答案：$\dfrac{12}{5}$

解析：由题意得 $AC\perp$ 平面 BC_1，

$$\left.\begin{matrix}BC_1\perp AC\\ BC_1\perp B_1C\\ AC\cap B_1C=C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}BC_1\perp 平面AB_1C\\ AB_1\subset 平面AB_1C\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC_1\perp AB_1，$$

在平面 $A_1B_1C_1$ 内，作 $C_1H\perp A_1B_1$，可证 $AB_1\perp$ 平面 C_1HB，则点 P 在平面 C_1HB，
由于动点 P 又在 $\Delta A_1B_1C_1$ 内，所以动点 P 在 $\Delta A_1B_1C_1$ 与平面 C_1HB 的交线 C_1H 上，
所求轨迹长度即为 $C_1H=\dfrac{12}{5}$。

16．答案：$\dfrac{27}{16}$



解析：如图，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，由 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}\ (0<\lambda<1)$，
可知点 C 在线段 AB 上，由 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 可知 $OC\perp AB$．不妨设 $\angle COA=\alpha$，则 $x=c\cos\alpha$，

$y=c\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)$，$x^2+y^2-xy=c^2\cos^2\alpha+c^2\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha)=\frac{3}{4}c^2$，

当 AB 最小时，c 最大，$AB=\sqrt{a^2+b^2-ab}\ge\sqrt{ab}=\sqrt{6}$，此时 $c_{\max}=\dfrac{2S}{\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

$x^2+y^2-xy=\frac{3}{4}c^2\le\frac{27}{16}$．

解答题

17．答案：（1）$\sqrt{10}$；（2）$y=\sqrt{3}-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，单调增区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],k\in Z$

解析：

（1）设 $z=a+bi(a,b\in R)$，

因为 $(3,\bar{z})\begin{bmatrix}z\\4\end{bmatrix}=3z+4\bar{z}=3(a+bi)+4(a-bi)=7a-bi$，……（2 分）

所以 $a=1,b=3$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$。……（2 分）

（2）$(y+\sin 2x,2)\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ y \end{bmatrix}-(1,\sin^2 x)\begin{bmatrix} \sin x \\ 2\sqrt{3}\mathrm{i} \end{bmatrix}=(2y-\sin x)+(y+\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x)\mathrm{i}$

由题意知 $y+\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x=0$ ……（2 分）

$y=2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{3}(1-\cos 2x)-\sin 2x=\sqrt{3}-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$……（2 分）

单调增区间为$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi],k\in Z$ ……（2 分）

18. 答案：（1）$f(x)=40\left[2\cos\frac{\pi}{6}(x+4)+3\right]$ （2）第7,8,9月是该地区的旅游旺季

解析：

（1）因为 A 和 k 是正整数，

由②可得：$40(A+k)-40(-A+k)=80A=160$，解得 $A=2$；

由③可得：且 $\frac{T}{2}=8-2=6$，则 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=12$，且 $\omega>0$，解得 $\omega=\frac{\pi}{6}$；

且 $40(k-2)=40$，解得 $k=3$；

所以 $f(x)=40\left[2\cos\frac{\pi}{6}(x+4)+3\right]$……（6 分，因为题中已经给出 x 的范围，所以这里未指出 x 范围不扣分）

（2）令 $f(x)=40\left[2\cos\frac{\pi}{6}(x+4)+3\right]>160$，则 $\cos\frac{\pi}{6}(x+4)>\frac{1}{2}$，

因为 $x\in[1,12]$，则 $\frac{\pi}{6}(x+4)\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{8\pi}{3}\right]$，

可得 $\frac{5\pi}{3}<\frac{\pi}{6}(x+4)<\frac{7\pi}{3}$，解得 $6<x<10$，

且 $x\in\mathbf{N}^*$，则 $x=7,8,9$，

所以第7,8,9月是该地区的旅游旺季……（6 分）

19. 解析：

（1）$a_n=\begin{cases} S_1,n=1 \\ S_n-S_{n-1},n\ge 2 \end{cases}=\begin{cases} 2,n=1 \\ 2n+3,n\ge 2 \end{cases}$； ……（5 分）

（2）$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+5}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}})=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{n^2+6n}{2(n^2+6n+2)}$． ……（7 分）

20. 答案：（1）$(2+2\sqrt{3},6]$；（2）见解析．

解析：

（1）因为 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$， $\sin A+\sin B=\sin A+\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$， ……（3 分）

且 $A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $a+b=2R(\sin A+\sin B)=4\sin(A+\frac{\pi}{6})\in(2\sqrt{3},4]$．

综上，ΔABC 周长的取值范围是 $(2+2\sqrt{3},6]$． ……（3 分）

（2）因为 $\sin^2 A+\sin^2 B>\sin C\ge\sin^2 C$，所以 $a^2+b^2-c^2>0$，

由余弦定理 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，可知 $C<\dfrac{\pi}{2}$．……（3 分）

因为 $A+B=\pi-C>\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A>\dfrac{\pi}{2}-B$

因为 A,B 都是锐角，所以 $\sin A>\sin(\dfrac{\pi}{2}-B)$ 即 $\sin A>\cos B$．

所以 $\sin^2 A+\sin^2 B>\cos^2 B+\sin^2 B=1$，证毕．……（3 分）

21．解析：

（1）证明：记 AC 中点为 O，连结 B_1O,DO，

因为 $B_1O\perp AC,DO\perp AC$，

又因为 $B_1O\cap DO=O$，

所以 $AC\perp$ 平面 B_1OD，所以 $AC\perp B_1D$．……（3 分）

（2）因为 $\overrightarrow{FE}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}$，

所以 $(\overrightarrow{FE})^2=\dfrac{1}{36}(\overrightarrow{CD})^2+\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CB_1})^2+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB_1}$，解得 $\cos\angle B_1CD=-\dfrac{1}{8}$，……（2 分）

由（1）可知 $\angle DOB_1$ 是二面角 $D-AC-B_1$ 的平面角，在 $\triangle B_1CD$ 中，由余弦定理得 $B_1D=9$．

在 $\triangle B_1OD$ 中，由余弦定理得 $\angle B_1OD=\dfrac{2\pi}{3}$．……（2 分）

（3）取 B_1E 中点 G，连接 CG，

由平面几何易证 $CG//EF$，

CG 与平面 ACB_1 所成角即为所求角。……（1 分）

在平面 DOB_1 中，作 $GK\perp B_1O$，

因为 $AC\perp GK,B_1O\cap AC=O$，

所以 $GK\perp$ 平面 ACB_1，所以 $\angle GCK$ 就是 CG 与平面 ACB_1 所成角。

在 ΔDOB_1 中，$GK=\dfrac{9}{8}$，在 ΔDCB_1 中，$CG=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{37}}{2}=\dfrac{3\sqrt{37}}{4}$，

计算知 $\sin\angle GCK=\dfrac{GK}{CG}=\dfrac{3\sqrt{37}}{74}$．……（4 分）

22．答案：（1）见解析；（2）$b_n=2^n$；（3）见解析．

解析：

（1）因为 $S_n{}^2=(S_n-S_{n-1})(S_n-1),n\geq 2$，所以 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=1,n\geq 2$，

由定义可知 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列；……（4 分）

（2）记 $P_n=\dfrac{b_1}{S_1}+\dfrac{b_2}{S_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{S_n}=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$，

$\dfrac{b_n}{S_n}=\begin{cases}P_n-P_{n-1},n\geq 2\\ P_1,n=1\end{cases}=n2^n\Rightarrow b_n=2^n$；……（4 分）

（3）记 $c_n=\dfrac{2n-1}{4^n-2^n}=\dfrac{2n-1}{4^n[1-(\frac{1}{2})^n]}\le\dfrac{2n-1}{3\cdot 4^{n-1}},n\ge 2$，

记 $e_n=\dfrac{2n-1}{4^{n-1}}$，由待定系数法得 $e_n=\dfrac{2n-1}{4^{n-1}}=\dfrac{6n-1}{9\cdot 4^{n-2}}-\dfrac{6n+5}{9\cdot 4^{n-1}}$，再记 $f_n=\dfrac{6n-1}{9\cdot 4^{n-2}}$，

$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\le c_1+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=2}^{n}e_k=c_1+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=2}^{n}(f_k-f_{k+1})=c_1+\dfrac{1}{3}(f_2-f_{n+1})=\dfrac{49}{54}-\dfrac{6n+5}{27\cdot 4^{n-1}}$，

因为 $\dfrac{6n+5}{27\cdot 4^{n-1}}>0$，所以 $T_n<\dfrac{49}{54}<\dfrac{7}{6}$．……（4 分）

另解：因为当 $n\ge 2$ 时，有 $4^n-2^n>3^n$，

所以 $c_n=\dfrac{2n-1}{4^n-2^n}<\dfrac{2n-1}{3^n},n\ge 2$，

记 $e_n=\dfrac{2n-1}{3^n}$，由待定系数法得 $e_n=\dfrac{2n-1}{3^n}=\dfrac{n}{3^{n-1}}-\dfrac{n+1}{3^n}$，再记 $f_n=\dfrac{n}{3^{n-1}}$，

$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k<c_1+\sum\limits_{k=2}^{n}e_k=c_1+\sum\limits_{k=2}^{n}(f_k-f_{k+1})=c_1+f_2-f_{n+1}=\dfrac{7}{6}-\dfrac{n+1}{3^n}$，

因为 $\dfrac{n+1}{3^n}>0$，所以 $T_n<\dfrac{7}{6}$．