山西大学附中

2023~2024学年第一学期高三10月月考（总第四次）

数学试题

考查时间：120分钟　满分：150分　考查内容：高考综合

命题人：吴晨晨　　审核人：张耀军

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1．若复数z满足$(1+2i)z=1$，则z的共轭复数是（　）

A．$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　　B．$-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$　　C．$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　　D．$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

【答案】C

【详解】$z=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$，

所以$\bar{z}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$，

故选：C

2．若集合$A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x>b，b\in R\}$，则$A\subseteq B$的充要条件是（　）

A．$b\geq 3$　　B．$2<b\leq 3$　　C．$b<2$　　D．$b\leq 2$

【答案】D

【详解】因为集合$A=\{x|2<x<3\}$，$B=\{x|x>b，b\in R\}$，

若$A\subseteq B$，利用数轴，可求$b\leq 2$，

故选：D.

3．二项式$\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的常数项为（　）

A．-160　　B．60　　C．120　　D．240

【答案】B

【详解】$\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的通项为：

$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$，

令$6-\frac{3}{2}r=0$得：$r=4$，

所以展开式的常数项为$C_6^4\times 2^2\times(-1)^4=60$，

故选：B.

4．某玻璃制品厂需要生产一种如图1所示的玻璃杯，该玻璃杯造型可以近似看成是一个圆柱挖去一个圆台得到，其近似模型的直观图如图2所示（图中数据单位为cm），则该玻璃杯所用玻璃的体积（单位：cm^3）为（　）


图1

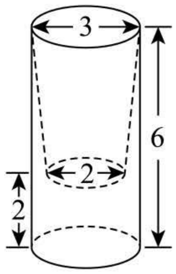


图2

A. $\frac{43\pi}{6}$　　B. $\frac{47\pi}{6}$　　C. $\frac{51\pi}{6}$　　D. $\frac{55\pi}{6}$

【答案】A

【详解】依题意，该玻璃杯所用玻璃的体积为$\pi\times(\frac{3}{2})^2\times6-\frac{1}{3}\times\pi\times[(\frac{3}{2})^2+1\times\frac{3}{2}+1^2]\times4=\frac{43\pi}{6}$.

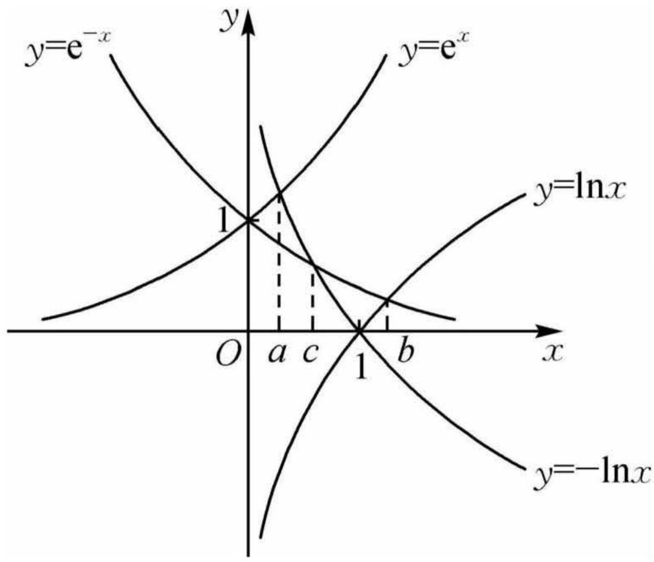
故选：A

5．若$e^a=-\ln a, e^{-b}=\ln b, e^{-c}=-\ln c$, 则（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

【答案】B

【详解】在同一直角坐标系中作出$y=e^x, y=e^{-x}, y=\ln x, y=-\ln x$的图象：



由图象可知$a<c<b$

故选：B

6．有6名选手（含选手甲、乙）参加了男子100米赛跑决赛（无并列名次），则在甲比乙快的条件下，甲、乙两人名次相邻的概率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】C

【详解】甲的名次比乙高，
当甲第一名时，乙有 5 种位置，其中甲乙相邻有 1 种情况，
当甲第二名时，乙有 4 种位置，其中甲乙相邻有 1 种情况，
当甲第三名时，乙有 3 种位置，其中甲乙相邻有 1 种情况，
当甲第四名时，乙有 2 种位置，其中甲乙相邻有 1 种情况，
当甲第五名时，乙有 1 种位置，其中甲乙相邻有 1 种情况，
所以甲的名次比乙高共有$5+4+3+2+1=15$种情况，
甲的名次比乙高且甲乙相邻有 5 种情况，
所以在甲的名次比乙高的条件下，甲、乙两人名次相邻的概率为$\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.
故选：C.公众号：高中试卷君

7．已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_n=2^{n+1}+a$，则$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_{11}=$（　）

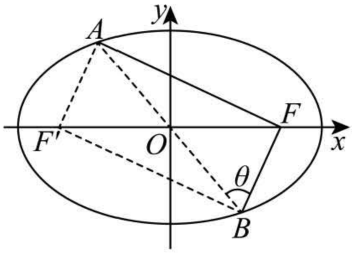
A．$\frac{2^{23}-8}{3}$　　B．$\frac{2^{13}-8}{3}$　　C．$\frac{2^{20}-1}{3}$　　D．$\frac{2^{25}-8}{3}$

【答案】A
【详解】因为$S_n=2^{n+1}+a$，所以$a_1=S_1=4+a$，$a_2=S_2-S_1=\left(2^3+a\right)-\left(2^2+a\right)=4$，
$a_3=S_3-S_2=\left(2^4+a\right)-\left(2^3+a\right)=8$，
又$\{a_n\}$是等比数列，所以$a_2^2=a_1a_3$，即$4^2=8(4+a)$，解得$a=-2$，所以$S_n=2^{n+1}-2$.
当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(2^{n+1}-2\right)-\left(2^n-2\right)=2^n$，又$a_1=2$满足$a_n=2^n$，
所以，$\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{2^{n+2}}{2^n}=4$，故数列$\{a_{n+1}a_n\}$是公比为$4$，首项为$a_1a_2=2\times4=8$的等比数列，
所以$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_{11}=\frac{8\left(1-4^{10}\right)}{1-4}=\frac{2^{23}-8}{3}$.
故选：A.

8．设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为$F$，椭圆$C$上的两点$A$、$B$关于原点对称，且满足$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，$|FB|\leq|FA|\leq3|FB|$，则椭圆$C$的离心率的取值范围是（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{5}}{3},1\right)$　　B．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$　　C．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$　　D．$\left[\sqrt{3}-1,1\right)$

【答案】B
【详解】如图所示：



设椭圆的左焦点F'，由椭圆的对称性可知，四边形$AFBF'$为平行四边形，

又$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，则$FA\perp FB$，所以平行四边形$AFBF'$为矩形，故$|AB|=|FF'|=2c$，

设$|AF'|=n$，$|AF|=m$，则$|BF|=n$，

在直角$\triangle ABF$中，$m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，

所以$2mn=(m+n)^2-(m^2+n^2)=4a^2-4c^2=4b^2$，则$mn=2b^2$，

所以$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{2c^2}{b^2}$，

令$\frac{m}{n}=t$，得$t+\frac{1}{t}=\frac{2c^2}{b^2}$，

又由$|FB|\le|FA|\le 3|FB|$，得$\frac{m}{n}=t\in[1,3]$，

因为对勾函数$y=t+\frac{1}{t}$在$[1,3]$上单调递增，所以$\frac{2c^2}{b^2}=t+\frac{1}{t}\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$，

所以 $\frac{c^2}{b^2}\in\left[1,\frac{5}{3}\right]$ ，即$\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}\in\left[1,\frac{5}{3}\right]$，则$\frac{a^2}{b^2}\in\left[2,\frac{8}{3}\right]$，故$\frac{b^2}{a^2}\in\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$，

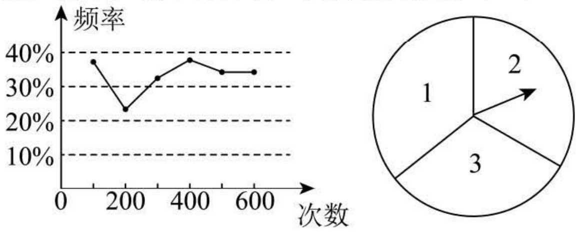
所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$，

所以椭圆离心率的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$.

故选：B.

二、选择题 本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错得 0 分.

9．两名同学在一次用频率估计概率的试验中统计了某一结果出现的频率，绘制出统计图如图所示，则不符合这一结果的试验是（　）



A．抛一枚硬币，正面朝上的概率

B．掷一枚正六面体的骰子，出现 1 点的概率

C．转动如图所示的转盘，转到数字为奇数的概率

D．从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取一个球恰好是蓝球的概率

【答案】ABC

【详解】解：根据统计图可知，实验结果在0.33附近波动，即其概率$P=0.33$，则

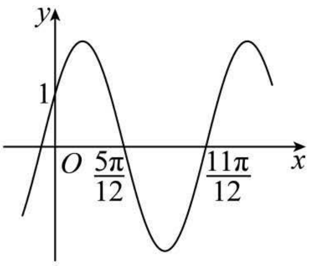
选项 A，掷一枚硬币，出现正面朝上的概率为$\frac{1}{2}$，故此选项不符合题意；

选项 B，掷一枚正六面体的骰子，出现 1 点的概率为$\frac{1}{6}$，故此选项不符合题意；

选项 C，转动如图所示的转盘，转到数字为奇数的概率为$\frac{2}{3}$，故此选项不符合题意；

选项 D，从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取一个球恰好是蓝球的概率为$\frac{1}{3}$，
故此选项符合题意；
故选：ABC.

10．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得函数$g(x)$的图象，则（　）



A．$\omega=2$

B．$g(x)$的图象关于点$(-\pi,0)$对称

C．$g(x)$在$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递增

D．$g(x)$在$(0,\pi)$上有两个极值点

【答案】AC

【详解】A 选项，设$f(x)$的最小正周期为T，由图象知$\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}T$，解得$T=\pi$，
因为$\omega>0$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$，故 A 正确；

B 选项，由$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$，得$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$，
又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以只有$\varphi=\frac{\pi}{6}$符合要求；
由$f(0)=1$，得$A\sin\frac{\pi}{6}=1$，故$A=2$，所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，
所以$g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$.
由$g(-\pi)=2$得$g(x)$的图象不关于点$(-\pi,0)$对称，故 B 不正确；

C 选项，由$-\pi+2k\pi\le 2x\le 2k\pi(k\in Z)$，得$-\frac{\pi}{2}+k\pi\le x\le k\pi(k\in Z)$，
即$g(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right](k\in Z)$，令$k=1$，得$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，
又$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，故$g(x)$在$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递增，故 C 正确；

D选项，当$x\in(0,\pi)$时，$2x\in(0,2\pi)$，由于$y=2\cos z$在$z\in(0,2\pi)$上，
只有$z=\pi$为极小值点，故$g(x)$在$(0,\pi)$上仅有一个极值点，故D不正确.
故选：AC.

11．已知函数$f(x)$的定义域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，其导函数为$f'(x)$.若$[x+f(x)]\sin x=f'(x)\cos x$，且$f(0)=0$，则（　）

A．$f(x)$是减函数　　B．$f(x)$是增函数

C．$f(x)$有最大值　　D．$f(x)$没有极值

【答案】BD

【详解】因为$f'(x)\cos x=[x+f(x)]\sin x$，所以$f'(x)\cos x-f(x)\sin x=x\sin x$，设$g(x)=f(x)\cos x$，则$g'(x)=x\sin x$，因为$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$g'(x)=x\sin x\geq 0$恒成立，

所以$y=g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，又因为$f(0)=0$，所以$g(0)=f(0)\cos 0=0$，所以当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$g(x)<0$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)>0$，

$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{\cos x}\right]'=\frac{g'(x)\cos x+g(x)\sin x}{\cos^2 x}$，当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$g(x)<0$，$g'(x)>0$，

$\cos x>0$，$\sin x<0$，故$f'(x)>0$恒成立；当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)>0$，$g'(x)>0$，

$\cos x>0$，$\sin x>0$，故$f'(x)>0$恒成立.所以$f'(x)\geq 0$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，故$y=f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

故选：BD.

12．已知三棱锥$A-BCD$的棱长均为6，其内有n个小球，球O_1与三棱锥$A-BCD$的四个面都相切，球O_2与三棱锥$A-BCD$的三个面和球O_1都相切，如此类推，....，球O_n与三棱锥$A-BCD$的三个面和球O_{n-1}都相切（$n\geq 2$，且$n\in\mathbf{N}^*$），球O_n的表面积为S_n，体积为V_n，则（　）

A．$V_1=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$

B．$S_3=\frac{3\pi}{8}$

C．数列$\{V_n\}$是公比为$\frac{1}{8}$的等比数列

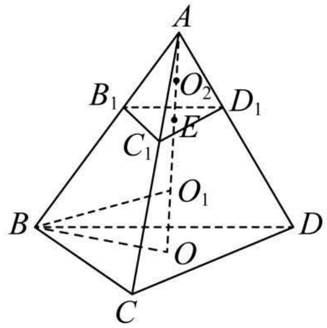
D．数列$\{S_n\}$的前n项和为$8\pi\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$

【答案】BCD

【详解】如图所示，AO是三棱锥$A-BCD$的高，O是三角形BCD的中心，

设三棱锥$A-BCD$的棱长均为a，所以$OB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

$AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.



O_1是三棱锥$A-BCD$的内切球的球心，O_1在AO上，

设三棱锥$A-BCD$的外接球半径为R，球O_n的半径为r_n，

则由$O_1B^2=OO_1^2+OB^2$，得$R^2=(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2$，

得$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

所以$r_1=AO-AO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，

又$a=6$，所以$r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以$V_1=\frac{4}{3}\pi r_1^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$.故A不正确；

在AO上取点E，使得$EO_1=r_1=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，则$AE=AO-2r_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{6}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a$，即$E$为$AO$的中点，则球$O_2$与球$O_1$切于$E$，

过E作与底面BCD平行的平面，分别与AB,AC,AD交于B_1,C_1,D_1，

则球O_2是三棱锥$A-B_1C_1D_1$的内切球，

因为E为AO的中点，所以三棱锥$A-B_1C_1D_1$的棱长是三棱锥$A-BCD$的棱长的一半，

所以球O_2的内切球的半径$r_2=\frac{1}{2}r_1$，

以此类推，所以$\{r_n\}$是首项为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，

所以$r_n=\frac{\sqrt{6}}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{\sqrt{6}}{2^n}$，$r_3=\frac{\sqrt{6}}{8}$，$S_3=4\pi r_3^2=4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2=\frac{3\pi}{8}$，故B正确；

所以$V_n=\frac{4}{3}\pi r_n^3$，$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{r_{n+1}^3}{r_n^3}=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，即数列$\{V_n\}$是公比为$\frac{1}{8}$的等比数列，故C正确；

$S_n=4\pi r_n^2=4\pi\cdot\frac{6}{4^n}=\frac{6\pi}{4^{n-1}}$，

$$S_1+S_2+\cdots+S_n=6\pi(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}})=6\pi\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=8\pi(1-\frac{1}{4^n})$$，故D正确.

故选：BCD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分.

13．已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角是_____.

【答案】$\dfrac{\pi}{6}$

【详解】因为$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2$，所以，$\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$，

所以，$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{1}{2}$，则$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2$，

又因为$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\vec{b}^2}=\sqrt{3}\left|\vec{a}\right|$，

所以，$\cos\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}\right\rangle=\dfrac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{\frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2}{\sqrt{3}\left|\vec{a}\right|^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0\le\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}\right\rangle\le\pi$，因此，$\left\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}\right\rangle=\dfrac{\pi}{6}$.

14.在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边为a,b,c，且$\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\sin^2A$，$a=7,b=5$，则$c=$_____.

【答案】3

【详解】由$\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\sin^2A$可知，

利用正弦定理可得$b^2+c^2+bc=a^2$，将$a=7$，$b=5$代入可得$25+c^2+5c=49$，

整理可得$c^2+5c-24=0$，解得$c=3$或$c=-8$（舍）;

即$c=3$.

故答案为：3

15. 若正实数a,b满足$a+b=1$，则$\dfrac{b^2}{a+1}+\dfrac{a^2}{b+2}$的最小值为_____.

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【详解】根据已知$a+b=1$，

所以$(a+1)+(b+2)=4$，

所以$\dfrac{b^2}{a+1}+\dfrac{a^2}{b+2}=\dfrac{1}{4}\left[(a+1)+(b+2)\right]\left(\dfrac{b^2}{a+1}+\dfrac{a^2}{b+2}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left[a^2+\dfrac{(b+2)b^2}{a+1}+\dfrac{(a+1)a^2}{b+2}+b^2\right]\ge\dfrac{1}{4}\left(a^2+2ab+b^2\right)=\dfrac{1}{4}(a+b)^2=\dfrac{1}{4}$,

当且仅当$a=\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{2}{5}$时取等号.

16．新冠病毒肺炎疫情防控难度极大，某地防疫防控部门决定进行全面入户排查4类人员：新冠患者、疑似患者、普通感冒发热者和新冠密切接触者，过程中排查到一户6口之家被确认为新冠肺炎密切接触者，按要求进一步对该6名成员逐一进行核糖核酸检测，若出现阳性，则该家庭定义为“感染高危户”，设该家庭每个成员检测呈阳性的概率相同均为$p(0<p<1)$，且相互独立，该家庭至少检测了5人才能确定为“感染高危户”的概率

为$f(p)$，当$p=p_0$时，$f(p)$最大，此时$P_0=$ ______.

【答案】$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$

【详解】由题意可得，该家庭至少检测了5人才能确定为“感染高危户”，则前4人检测为阴性，第5人为阳性或前5人检测为阴性，第6人为阳性，由相互独立事件同时发生的概率公式，得$f(p)=(1-p)^4p+(1-p)^5p$

$f'(p)=-4(1-p)^3p+(1-p)^4-5(1-p)^4p+(1-p)^5$

$=2(1-p)^3\left(3p^2-6p+1\right)=2(1-p)^3\left(p-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(p-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

令$f'(p)=0$，即$2(1-p)^3\left(p-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(p-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)=0$，

解得$p=1$(舍)或$p=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$（舍）或$p=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$.

当$0<p<\frac{3-\sqrt{6}}{3}$时，$f'(p)>0$；

当$\frac{3-\sqrt{6}}{3}<p<1$时，$f'(p)<0$；

所以函数$f(p)$在$\left(0,\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3},1\right)$上单调递减；

当$p=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$时，函数$f(p)$取得极大值，也是最大值.

所以$P_0=\frac{3-\sqrt{6}}{3}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$是等比数列，满足$a_1=3$，$b_1=1$，$b_2+S_2=10$，$a_5-2b_2=a_3$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 令$c_n=\begin{cases}\frac{2}{S_n}, n为奇数,\\ b_n, n为偶数,\end{cases}$设数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_{2n}$.

【答案】(1) 解：设数列$\{a_n\}$的公差为d，数列$\{b_n\}$的公比为q，

则由$a_1=3$，$b_1=1$，$b_2+S_2=10$，$a_5-2b_2=a_3$，

得$\begin{cases}q+3+3+d=10\\ 3+4d-2q=3+2d\end{cases}$，解得$d=2$，$q=2$，

$\therefore a_n=2n+1$，$b_n=2^{n-1}$；

(2)解：由(1)可得，$S_n=n(n+2)$，

则 $c_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n(n+2)},n为奇数\\ 2^{n-1},n为偶数\end{cases}$，即 $c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2},n为奇数\\ 2^{n-1},n为偶数\end{cases}$，

$\therefore T_{2n}=(c_1+c_3+c_5+\ldots+c_{2n-1})+(c_2+c_4+\ldots+c_{2n})$

$=[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\ldots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]+(2+2^3+\ldots+2^{2n-1})$

$=1-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{2(1\text{-}4^n)}{1\text{-}4}$

$=\dfrac{2n}{2n+1}+\dfrac{2}{3}(4^n-1).$

18.（12 分）信用是指依附在人之间、单位之间和商品交易之间形成的一种相互信任的生产关系和社会关系.良好的信用对个人和社会的发展有着重要的作用.某地推行信用积分制度，将信用积分从高到低分为五档，其中信用积分超过 150 分为信用极好；信用积分在$(120,150]$内为信用优秀；信用积分在$(100,120]$内为信用良好；信用积分在$(80,100]$内为轻微失信;信用积分不超过 80 分的信用较差.该地推行信用积分制度一段时间后，为了解信用积分制度推行的效果，该地政府从该地居民中随机抽取 200 名居民，并得到他们的信用积分数据，如下表所示.

信用等级	信用极好	信用优秀	信用良好	轻微失信	信用较差
人数	25	60	65	35	15

(1)从这 200 名居民中随机抽取 2 人，求这 2 人都是信用极好的概率.

(2)为巩固信用积分制度，该地政府对信用极好的居民发放 100 元电子消费金；对信用优秀或信用良好的居民发放 50 元消费金;对轻微失信或信用较差的居民不发放消费金.若以表中各信用等级的频率视为相应信用等级的概率，现从该地居民中随机抽取 2 人，记这 2 人获得的消费金总额为 X 元，求 X 的分布列与期望.

【答案】（1）从这 200 名居民中随机抽取 2 人，共有C_{200}^2种不同抽法，

其中符合条件的不同抽法有C_{25}^2，

则所求概率 $P=\dfrac{C_{25}^2}{C_{200}^2}=\dfrac{25\times12}{100\times199}=\dfrac{3}{199}$.

（2）从该地居民中随机抽取 1 人，则这人获得 100 元电子消费金的概率是$\dfrac{1}{8}$，获得 50 元电子消费金的概率是$\dfrac{5}{8}$，没有获得电子消费金的概率是$\dfrac{1}{4}$.

由题意可知 X 的所有可能取值为 0，50，100，150，200.

$P(X=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$，

$P(X=50)=C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{16}$，

$P(X=100)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{29}{64}$,

$P(X=150)=C_2^1\times\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{32}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$,

则 X 的分布列为

X	0	50	100	150	200
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{64}$

故 $E(X)=0\times\frac{1}{16}+50\times\frac{5}{16}+100\times\frac{29}{64}+150\times\frac{5}{32}+200\times\frac{1}{64}=\frac{175}{2}$.

19.（12 分）长方形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，点 E 为 CD 中点（如图 1），将点 D 绕 AE 旋转至点 P 处，使平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$（如图 2）.

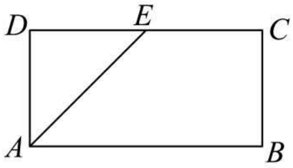


图1

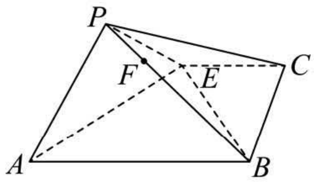


图2

(1)求证：$PA\perp PB$；

(2)点 F 在线段 PB 上，当二面角 $F-AE-P$ 大小为 $\frac{\pi}{4}$ 时，求四棱锥 $F-ABCE$ 的体积.

【答案】（1）证明：在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，E 为 CD 中点，

$\therefore AE=BE=2$，

$\therefore AE\perp BE$，

$\because$ 平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PAE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，

$BE\subset$ 平面 $ABCE$，

$\therefore BE\perp$ 平面 PAE，$AP\subset$ 平面 PAE，

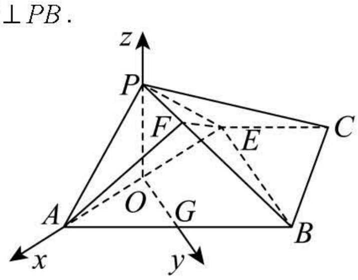
$\therefore BE\perp PA$，又 $PA\perp PE$，$BE\subset$ 平面 PBE，$PE\subset$ 平面 PBE，

$PE\cap BE=E$，

$\therefore PA\perp$ 平面 PBE，$PB\subset$ 平面 PBE，

$\therefore PA\perp PB$.

（2）



如图，取AE的中点O，AB的中点G，连接OP,OG，
由题意可得OP,OG,OA两两互相垂直，
以O为坐标原点，以OA，OG，OP分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，
则$A(1,0,0)$，$E(-1,0,0)$，$B(-1,2,0)$，$P(0,0,1)$，
设$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则$F(-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$，
设平面FAE的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，
则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}-2x=0\\ (-\lambda-1)x+2\lambda y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$，
令$y=1$，得$z=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$，
$\therefore\vec{m}=\left(0,1,\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}\right)$，
又$BE\perp$平面PAE，$\therefore\vec{n}=\overrightarrow{EB}=(0,2,0)$是平面$PAE$的一个法向量，
$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda+1}}}$，
令$\dfrac{2}{2\times\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda+1}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{3}$或$\lambda=-1$（舍）.
即F为PB的靠近P的三等分点时，二面角$F-AE-P$的平面角为$\dfrac{\pi}{4}$，
$\because PO\perp$平面$ABCE$，且$PO=1$，公众号：高中试卷君
$\therefore F$到平面$ABCE$的距离为$\dfrac{2}{3}$，又四边形$ABCE$的面积为3，
$\therefore$四棱锥$F-ABCE$的体积$V_{F-ABCE}=\dfrac{1}{3}S_{ABCE}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

20.（12分）已知函数$f(x)=2\ln x-x^2+ax(a\in R)$.
(1)当$a=0$时，求$f(x)$的单调区间；
(2)若函数$g(x)=f(x)-ax+m$在$\left[\dfrac{1}{e},e\right]$上有两个零点，求实数$m$的取值范围.

【答案】（1）当$a=0$时，$f(x)=2\ln x-x^2(x>0)$，
则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{2(1-x)(1+x)}{x}(x>0)$，
令$f'(x)>0$得$0<x<1$，所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$
令$f'(x)<0$得$x>1$，所以$f(x)$的单调递减区间为$(1,+\infty)$

（2）$g(x)=f(x)-ax+m=2\ln x-x^2+m$，
则$g'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{x}$，

$\because x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，$\therefore$由$g'(x)=0$，得$x=1$.

当$\frac{1}{e}\le x<1$，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增，

当$1<x<e$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减，

故当$x=1$时，函数$g(x)$取得极大值$g(1)=m-1$，

又$g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}$，$g(e)=m+2-e^2$，

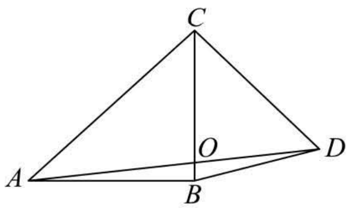
且$g\left(\frac{1}{e}\right)>g(e)$，

$\therefore g(x)=f(x)-ax+m$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有两个零点需满足条件$\begin{cases}g(1)=m-1>0\\ g\left(\frac{1}{e}\right)=m-2-\frac{1}{e^2}\le 0\end{cases}$，

解得$1<m\le 2+\frac{1}{e^2}$

故实数m的取值范围是$\left(1,2+\frac{1}{e^2}\right]$.

21.（12分）已知平面四边形$ABDC$中，对角线CB为钝角$\angle ACD$的平分线，CB与AD相交于点O，$AC=5$，$AD=7$，$\cos\angle ACD=-\frac{1}{5}$.



(1)求CO的长；

(2)若$BC=BD$，求$\triangle ABD$的面积.

【答案】（1）在$\triangle ACD$中，由余弦定理得$\cos\angle ACD=\frac{25+CD^2-49}{2\times 5\times CD}=-\frac{1}{5}$，

解得$CD=4$或$CD=-6$（舍去）.

因为$\cos\angle ACD=-\frac{1}{5}$，所以$\sin\angle ACD=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以$\cos\angle ACD=1-2\sin^2\angle ACO$，解得$\sin\angle ACO=\frac{\sqrt{15}}{5}$（负值舍去），

所以$\sin\angle DCO=\sin\angle ACO=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

因为$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle DCO}$，

所以$\frac{1}{2}CA\cdot CD\sin\angle ACD=\frac{1}{2}CA\cdot CO\sin\angle ACO+\frac{1}{2}CD\cdot CO\sin\angle DCO$.

所以$\frac{1}{2}\times 5\times 4\times \frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{1}{2}\times 5\times CO\times \frac{\sqrt{15}}{5}+\frac{1}{2}\times 4\times CO\times \frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以$CO=\frac{8\sqrt{10}}{9}$.

（2）在$\triangle ACD$中，由正弦定理可得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}\Rightarrow \frac{5}{\sin\angle ADC}=\frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$，

则$\sin\angle ADC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，由于$\angle ADC$为锐角，所以$\cos\angle ADC=\frac{5}{7}$.

因为$BD=BC$，所以$\angle BDC=\angle BCD$，

所以$\sin\angle BDC=\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以$\cos\angle BDC=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

由余弦定理可得$\cos\angle BDC=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2CD\cdot BD}=\frac{16}{8BD}=\frac{2}{BD}$，解得$BD=BC=\sqrt{10}$.

因为$\cos\angle ADC=\frac{5}{7}$，

所以$\sin\angle ADB=\sin\left(\angle BDC-\angle ADC\right)=\sin\angle BDC\cos\angle ADC-\cos\angle BDC\sin\angle ADC$

$=\frac{\sqrt{15}}{5}\times\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{10}}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=\frac{\sqrt{15}}{35}$，

所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}DA\cdot DB\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{15}}{35}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

22．（12 分）已知函数$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当$a=e$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积

（2）若不等式$f\left(x\right)\geq 1$恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$\because f(x)=e^x-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$\therefore k=f'(1)=e-1$.

$\because f(1)=e+1$，$\therefore$切点坐标为$(1,1+e)$,

$\therefore$函数$f\left(x\right)$在点(1,f(1)处的切线方程为$y-e-1=(e-1)(x-1)$,即$y=\left(e-1\right)x+2$,

$\therefore$切线与坐标轴交点坐标分别为$(0,2),(\frac{-2}{e-1},0)$,

$\therefore$所求三角形面积为$\frac{1}{2}\times 2\times|\frac{-2}{e-1}|=\frac{2}{e-1}$.

（2）[方法一]：通性通法

$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$,$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$，且$a>0$.

设$g(x)=f'(x)$,则$g'(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$,

$\therefore$g(x)在$(0,+\infty)$上单调递增，即$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a=1$时，$f'(1)=0$,$\therefore f\left(x\right)_{min}=f\left(1\right)=1$,$\therefore f\left(x\right)\geq 1$成立.

当$a>1$时，$\frac{1}{a}<1$，$\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$，$\therefore f'(\frac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$，

$\therefore$存在唯一$x_0>0$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，且当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时$f'(x)>0$，$\therefore ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$，

因此$f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a$

$=\frac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geq 2\ln a-1+2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$,

$\therefore f(x)>1,\therefore f(x)\geq 1$恒成立；

当$0<a<1$时，$f(1)=a+\ln a<a<1,\therefore f(1)<1, f(x)\geq 1$不是恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

［方法二］【最优解】：同构

由$f(x)\geq 1$得$ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geq 1$，即$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geq \ln x+x$，而$\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$，所以$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geq e^{\ln x}+\ln x$.

令$h(m)=e^m+m$，则$h'(m)=e^m+1>0$，所以$h(m)$在 R 上单调递增.

由$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geq e^{\ln x}+\ln x$，可知$h(\ln a+x-1)\geq h(\ln x)$，所以$\ln a+x-1\geq \ln x$，所以$\ln a\geq(\ln x-x+1)_{\max}$.

令$F(x)=\ln x-x+1$，则$F'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

所以当$x\in(0,1)$时，$F'(x)>0,F(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$F'(x)<0,F(x)$单调递减.

所以$[F(x)]_{\max}=F(1)=0$，则$\ln a\geq 0$，即$a\geq 1$.

所以 a 的取值范围为$a\geq 1$.

［方法三］：换元同构

由题意知$a>0,x>0$，令$ae^{x-1}=t$，所以$\ln a+x-1=\ln t$，所以$\ln a=\ln t-x+1$.

于是$f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a=t-\ln x+\ln t-x+1$.

由于$f(x)\geq 1,t-\ln x+\ln t-x+1\geq 1\Leftrightarrow t+\ln t\geq x+\ln x$，而$y=x+\ln x$在$x\in(0,+\infty)$时为增函数，故$t\geq x$，即$ae^{x-1}\geq x$，分离参数后有$a\geq\frac{x}{e^{x-1}}$.

令$g(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$，所以$g'(x)=\frac{e^{x-1}-xe^{x-1}}{e^{2x-2}}=\frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2x-2}}$.

当$0<x<1$时，$g'(x)>0,g(x)$单调递增；当$x>1$时，$g'(x)<0,g(x)$单调递减.

所以当$x=1$时，$g(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$取得最大值为$g(1)=1$．所以$a\geq 1$.

［方法四］：

因为定义域为$(0,+\infty)$，且$f(x)\geq 1$，所以$f(1)\geq 1$，即$a+\ln a\geq 1$.

令$S(a)=a+\ln a$，则$S'(a)=1+\frac{1}{a}>0$，所以$S(a)$在区间$(0,+\infty)$内单调递增.

因为$S(1)=1$，所以$a\geq 1$时，有$S(a)\geq S(1)$，即$a+\ln a\geq 1$.

下面证明当$a\geq 1$时，$f(x)\geq 1$恒成立.

令$T(a)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，只需证当$a\geq 1$时，$T(a)\geq 1$恒成立.

因为$T'(a)=e^{x-1}+\dfrac{1}{a}>0$，所以$T(a)$在区间$[1,+\infty)$内单调递增，则
$[T(a)]_{\min}=T(1)=e^{x-1}-\ln x$．
因此要证明$a\ge 1$时，$T(a)\ge 1$恒成立，只需证明$[T(a)]_{\min}=e^{x-1}-\ln x\ge 1$即可．
由$e^{x}\ge x+1,\ln x\le x-1$，得$e^{x-1}\ge x,-\ln x\ge 1-x$．
上面两个不等式两边相加可得$e^{x-1}-\ln x\ge 1$，故$a\ge 1$时，$f(x)\ge 1$恒成立．
当$0<a<1$时，因为$f(1)=a+\ln a<1$，显然不满足$f(x)\ge 1$恒成立．
所以 a 的取值范围为$a\ge 1$．
【整体点评】(2) 方法一：利用导数判断函数$f\left(x\right)$的单调性，求出其最小值，由$f_{\min}\ge 0$即可求出，解法虽稍麻烦，但是此类题，也是本题的通性通法；
方法二：利用同构思想将原不等式化成$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\ge e^{\ln x}+\ln x$，再根据函数$h(m)=e^{m}+m$的单调性以及分离参数法即可求出，是本题的最优解；
方法三：通过先换元，令$ae^{x-1}=t$，再同构，可将原不等式化成$t+\ln t\ge x+\ln x$，再根据函数$y=x+\ln x$的单调性以及分离参数法求出；
方法四：由特殊到一般，利用$f(1)\ge 1$可得a的取值范围，再进行充分性证明即可．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。