

哈尔滨师大附中
东北师大附中
辽宁省实验中学

2021 年高三第一次联合模拟考试

文科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

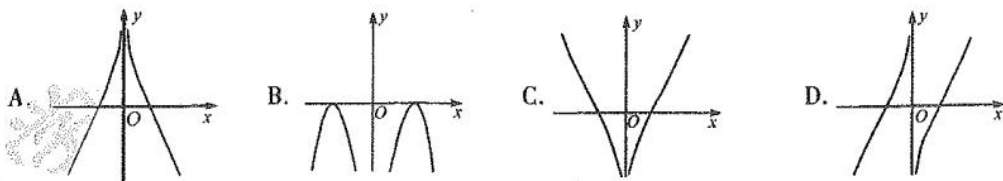
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\}$, 集合 $N = \{x | y = \lg(3 - x)\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $\{y | y \geq 3\}$ B. $\{y | y \leq 0\}$ C. $\{y | 0 < y < 3\}$ D. \emptyset
2. 设 $z = 1 - 2i$ (i 是虚数单位), 则 $\left| \frac{5}{z} \right| =$
 A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1
3. “ $\log_3 a < \log_3 b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 中国古代几何中的勾股容圆,是阐述直角三角形中内切圆问题. 此类问题最早见于《九章算术》“勾股”章,该章第 16 题为:“今有勾八步,股十五步.问勾中容圆,径几何?”意思是“直角三角形的两条直角边分别为 8 和 15,则其内切圆直径是多少?”若向上述直角三角形内随机抛掷 100 颗米粒(大小忽略不计,取 $\pi = 3$),落在三角形内切圆内的米粒数大约为
 A. 55 B. 50 C. 45 D. 40
5. 下图的茎叶图是甲、乙两位学生在学校举办的知识竞赛几轮比赛中的得分,则下列说法正确的是

甲	乙
9	5 1
5	4 3
8 2	3 0 4
6 4	2 0 5 7 8
4 2 1	1 2

- A. 甲的平均数大于乙的平均数
- B. 甲的中位数大于乙的中位数
- C. 甲的方差大于乙的方差
- D. 甲的方差小于乙的方差

6. 函数 $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象大致为

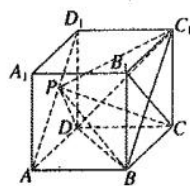


7. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\vec{EC} = 2\vec{BE}$, $\angle ABC = 120^\circ$, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BD}$ 的值为

- A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

8. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 AD_1 上运动, 则下列命题中错误的是

- A. 直线 PC_1 和平面 AA_1D_1D 所成的角为定值
B. 点 P 到平面 C_1BD 的距离为定值
C. 异面直线 C_1P 和 CB_1 所成的角为定值
D. 直线 CD 和平面 BPC_1 平行



9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + 2a_8 = 4$, 则 $2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot 2^{a_3} \cdots 2^{a_9} =$

- A. 32 B. 256 C. 512 D. 1024

10. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 满足条件: (1) 虚轴长为 4; (2) 离心率为 $\sqrt{5}$, 求得双曲线方程为 $f(x, y) = 0$. 若去掉条件 (2), 另加一个条件求得双曲线方程仍为 $f(x, y) = 0$, 则下列四个条件中, 符合添加的条件的个数为

- ① 双曲线 C 上任意的点 P 到焦点 F_1, F_2 的距离都满足 $||PF_1| - |PF_2|| = 2$;
② 双曲线 C 的焦点为 $F_1(0, -\sqrt{5}), F_2(0, \sqrt{5})$;
③ 双曲线 C 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$;
④ 双曲线 C 的一个顶点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $S_{2021} =$

- A. $3(2^{1011} - 1)$ B. $2^{1011} - 3$ C. $3(2^{1010} - 1)$ D. $2^{1012} - 3$

12. 球面上两点之间的最短连线的长度, 就是经过这两个点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度 (大圆就是经过球心的平面截球面所得的圆), 我们把这个弧长叫做两点的球面距离. 已知正

$\triangle ABC$ 的顶点都在半径为 2 的球面上, 球心到 $\triangle ABC$ 所在平面距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 则 A, B 两点间的球面距离为

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填写在答题纸相应位置上.

13. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - 3y$ 的最大值是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1}, & x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}x, & x > 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为_____.

15. 已知 M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点, N 是圆 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 关于直线 $x - y = 0$ 对称的曲线 C 上任意一点, 则 $|MN|$ 的最小值为_____.

16. 定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 1$, 则 $f(x)$ 的零点是_____.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

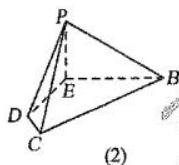
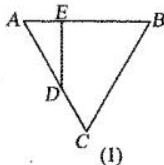
在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin 2B = b \sin A$.

(1) 若 $a = 3, b = \sqrt{7}$, 求 c ;

(2) 求 $\frac{a \cos C - c \cos A}{b}$ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图(1), 在等边三角形 ABC 中, $AB = 12$, 点 D 在线段 AC 上, $DE \perp AB$ 于 E , 现将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle PDE$ 的位置(如图(2)).



(1) 求证: 平面 $PBE \perp$ 平面 PED ;

(2) 若 $PB = 4\sqrt{5}, PE = 4$, 求 PB 与平面 PEC 成角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分)

据调查, 目前对于已经近视的小学生, 有两种配戴眼镜的选择, 一种是佩戴传统的框架眼镜; 另一种是佩戴角膜塑形镜, 这种眼镜是晚上睡觉时佩戴的一种特殊的隐形眼镜, 因其在一定程度上可以减缓近视的发展速度, 越来越多的小学生家长选择角膜塑形镜控制孩子的近视发展. A 市从该地区小学生中随机抽取容量为 100 的样本, 其中因近视佩戴眼镜的有 24 人(其中佩戴角膜塑形镜的 6 人中, 2 名是男生, 4 名是女生).

- (1) 若从样本中选一位学生,那么该同学是戴角膜塑形镜的近视者概率是多大?
 (2) 从这 6 名戴角膜塑形镜的学生中,选出 3 个人,求其中男生至少一人的概率.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{1}{2}$, 椭圆 C 过点 $(1, \frac{3}{2})$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的左、右焦点,过点 F_2 的直线 l (不过坐标原点) 与椭圆 C 交于 A, B 两点,求 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B}$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}, g(x) = a(x - \ln x) (a \in R)$.

- (1) 求函数 $g(x)$ 的极值;
 (2) 若 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上有且只有一个零点,求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分,作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑. 本题满分 10 分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$,以原点为极点, x 轴非负

半轴为极轴建立极坐标系,射线 $\theta = \varphi$ 与曲线 C 交于点 T ,将射线 OT 绕极点逆时针方向旋转 90° 交曲线 C 于点 N .

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程;
 (2) 求 $\triangle TON$ 面积的范围.

23. [选修 4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

- (1) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 4 - x$;
 (2) $a, b \in \{y | y = f(x)\}$,试比较 $2(a + b)$ 与 $ab + 4$ 的大小.

关于我们

自主选拔在线 (原自主招生在线) 创办于 2014 年,历史可追溯至 2008 年,隶属北京

天星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

 微信搜一搜 自主选拔在线