2020 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅰ卷　理科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

　则异面直线 AM 与 CD_1 所成角

　在直角梯形 $ABCD$ 中

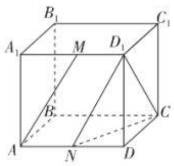
1. D 【解析】由题意知集合 C 中元素在集合 A 中或在集合 B 中的有 1，3，4，7，故 $(A\cup B)\cap C=\{1,3,4,7\}$.

2. B 【解析】由题意知 $z=\frac{2+mi}{1-i}=\frac{2-m+(m+2)i}{2}$，因为 $|z|=2$，所以 $\frac{(2-m)^2+(m+2)^2}{4}=4$，即 $m^2=4$，解得 $m=\pm2$.

3. A 【解析】$e^a+2b>e^b+2a\Leftrightarrow e^a-2a>e^b-2b$，令 $f(x)=e^x-2x(x>0)$，$f'(x)=e^x-2$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln2$，故 $f(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 上单调递减，在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增，故当 $a>b>1$ 时，$f(a)>f(b)$，故"$a>b>1$"是"$e^a+2b>e^b+2a$"的充分条件；但当 $0<a<b<\ln2$ 时，有 $f(a)>f(b)$，故"$a>b>1$"是"$e^a+2b>e^b+2a$"的不必要条件.

4. D 【解析】$f(x+2)=\frac{1}{1-f(x)}$，$f(x+4)=\frac{1}{1-f(x+2)}=1-\frac{1}{f(x)}$，$f(x+6)=\frac{1}{1-f(x+4)}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，$f(2018)=f(6\times336+2)=f(2)=-1$，$f(2020)=f(6\times336+4)=f(4)=\frac{1}{2}$，所以 $f(2018)+f(2020)=-\frac{1}{2}$.

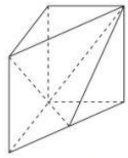
5. A 【解析】取 AD 的中点 N，连结 CN，D_1N，易知 $AM/\!/ND_1$，故 $\angle ND_1C$ 即为异面直线 AM 与 CD_1 所成的角．不妨设 $AB=1$，则 $CN=D_1N=\frac{\sqrt5}{2}$，$CD_1=\sqrt2$，故



$\cos\angle ND_1C=\frac{\frac{5}{4}+2-\frac{5}{4}}{2\times\sqrt2\times\frac{\sqrt5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

6. B 【解析】由题意知 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上奇函数且为减函数，不等式 $g(x+3)+g(1-2x)\geqslant0$ 等价于 $g(x+3)\geqslant-g(1-2x)$，即 $g(x+3)\geqslant g(2x-1)$，故 $x+3\leqslant2x-1$，解得 $x\geqslant4$.

7. C 【解析】该几何体为一个直三棱柱削去两个三棱锥，故体积为 $V=\frac{1}{2}\times2\times2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=2$.



8. C 【解析】由 $f(-x)=f(x)$ 知 $f(x)$ 为偶函数，故排除 A，D；$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}+\frac{4}{9\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}=\frac{7-54\pi^3}{36\pi^2}<0$.

9. A 【解析】由 $\sin(2\alpha+\beta)=3\sin\beta$ 得 $\sin2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\sin\beta=3\sin\beta$，两边同时除以 $\cos\beta$ 得 $\sin2\alpha+\cos2\alpha\tan\beta=3\tan\beta$，即 $\frac{1}{\tan\beta}=\frac{3-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha}=2\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}$，所以 $\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}=2\tan\alpha$，故 $\lambda=2$.

10. C 【解析】设过点 $A(-1,0)$ 的直线方程为 $y=k(x+1)$，则若直线 l 与函数 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，即方程 $k(x+1)=3x^3-3x$ 有三个不同的根，所以 $k(x+1)=3x(x^2-1)=3x(x+1)(x-1)$，即 $k=3x(x-1)$ 有 2 个不等于 -1 的根．而当 $x=-1$ 时 $k=6$，所以 $\begin{cases}\Delta=9+4\times3k>0\\k\neq6\end{cases}$，解得 $k>-\frac{3}{4}$ 且 $k\neq6$，故 $k\in\left(-\frac{3}{4},6\right)\cup(6,+\infty)$.

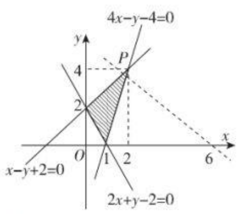
11. C 【解析】$f(x)=\sqrt2\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt2\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{3}+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $g(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$．由 $x=\frac{\pi}{3}$ 为 $g(x)$ 的一条对称轴，则 $\varphi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，故 $g(x)=\sqrt2\sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)$．令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\leqslant 2x-\frac{7\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$.

12. B 【解析】$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{b_{n+1}+a_n}{2}-b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n)+\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{3}(a_n-b_n)$，$c_1=a_1-b_1=0.9$，故$\{c_n\}$是首项为0.9，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，故$c_n=0.9\times\frac{1}{3^{n-1}}$，则$0.9\times\frac{1}{3^{n-1}}\leqslant\frac{1}{10^4}$，即$3^{n-3}\geqslant10^3$，当$n=9$时，$3^6=729<10^3$；当$n=10$时，$3^7=2187>10^3$，显然当$n\geqslant10$时，$3^{n-3}\geqslant10^3$成立，故$n$的最小值为10.

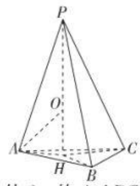
13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$f'(x)=a(3x^2-1)$，由$f'(0)\cdot f'(1)=-1$，即$2a^2=1$，解得$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. -1 【解析】如图阴影部分为可行域，直线$mx-y-6m=0$恒过定点$(6,0)$，当过点P时m取最小值-1.



15. ①③ 【解析】由题意知$f(x)=0$有唯一解x_0，即$xe^x-x-\ln x-k+1=0$的根为x_0. 令$g(x)=xe^x-x-\ln x-k+1$，$g'(x)=(x+1)e^x-\frac{x+1}{x}=(x+1)(e^x-\frac{1}{x})$，令$g'(x)=0$得$e^x=\frac{1}{x}$，当$x>0$时，$e^x=\frac{1}{x}$有唯一解$t$，满足$te^t=1$，故$g(x)$在$(0,t)$上单调递减，$(t,+\infty)$上单调递增. 又因为$x\to0$，$g(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$，$g(x)\to+\infty$，因此$t=x_0$，即$g(x_0)=0$，故$k=2$，$\ln x_0+x_0=0$. 另外，令$h(x)=\ln x+x$，$h'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，故$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h(\frac{1}{e})=-1+\frac{1}{e}<0$，$h(\frac{1}{2})=-\ln2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{4}<0$，故④错误.

16. $\frac{192\pi}{11}$ 【解析】如图，作$PH\perp$平面ABC，垂足为H，连结HA，HB，HC. 因为$PA\perp BC$，$BC\perp PH$，所以$BC\perp$平面AHP，故$BC\perp AH$；同理得$AC\perp BH$，故H为$\triangle ABC$的垂心. 又因为$\mathrm{Rt}\triangle AHP\cong\mathrm{Rt}\triangle BHP\cong\mathrm{Rt}\triangle CHP$，故$AH=BH=CH$，故$H$为$\triangle ABC$的外心. 故$\triangle ABC$为等边三角形，因此$2AH=\frac{2}{\sin60^\circ}$，解得$AH=\frac{2}{\sqrt{3}}$，故$PH=\sqrt{4^2-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{44}{3}}$. 设三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为$R$，则$(PH-R)^2+AH^2=R^2$，解得$R^2=\frac{48}{11}$，故外接球表面积为$S=4\pi\times\frac{48}{11}=\frac{192\pi}{11}$.



17.【解析】(1)由$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$得$3-2k=0$，即$k=\frac{3}{2}$；…………………………………… 3分

(2)由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$k+6=0$，

所以$k=-6$. ………………………………… 6分

设向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=5+45=50$，故$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2=45$，故$\cos\theta=\frac{45}{5\sqrt{2}\times3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …… 10分

18.【解析】(1)因为$f(x)$为偶函数，

故先研究$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性.

当$x>0$时，当$m=\frac{1}{2}$时，$f(x)=|e^{-x}-\frac{1}{2}|$，

令$f(x)=0$，解得$x=\ln2$，当$0<x<\ln2$时，$f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}$单调递减；当$x>\ln2$时，$f(x)=\frac{1}{2}-e^{-x}$单调递增. 故$f(x)$在$(-\infty,-\ln2)$，$(0,\ln2)$上单调递减，在$(-\ln2,0)$，$(\ln2,+\infty)$上单调递增.

……………………………………………… 5分

(2)由于$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

故方程$f(x)=\frac{1}{4}$在$(0,+\infty)$上有一个根即可.

当$m\leqslant0$时，$f(x)=e^{-x}-m$，即$m=e^{-x}-\frac{1}{4}$在$(0,+\infty)$上有一个根，由于$y=e^{-x}-\frac{1}{4}$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$y=e^{-x}-\frac{1}{4}\in(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$，故$-\frac{1}{4}<m\leqslant0$；…………………… 7分

当 $0<m<1$ 时，令 $e^{-x}-m=0$，解得 $x=-\ln m$，当 $x\in(0,-\ln m)$ 时，$y=e^{-x}-m>0$；当 $x\in(-\ln m,+\infty)$ 时，$y=e^{-x}-m<0$. 故由题意知只需 $\begin{cases}1-m>\frac{1}{4}\\ m\leqslant\frac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<\frac{1}{4}\\ m>\frac{1}{4}\\ 0<m<1\end{cases}$，解得 $0<m\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}<m<1$；…………………………………… 9分

当 $m\geqslant1$ 时，$f(x)=m-e^{-x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由于此时 $f(x)\in(m-1,m)$，故只需 $m-1<\frac{1}{4}<m$，即 $1\leqslant m<\frac{5}{4}$. 综上可得，$-\frac{1}{4}<m\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}<m<\frac{5}{4}$. …………………………………… 12分

19.【解析】(1) $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$，故 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，故 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列，首项 $\frac{1}{a_1}=1$，公差为 2，故 $\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times2=2n-1$，故 $a_n=\frac{1}{2n-1}$；…… 5分

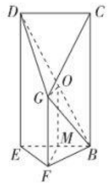
(2) $b_n=\frac{1}{a_{n+1}n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，…………………………………… 7分

故 $S_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2})=1-\frac{1}{(n+1)^2}$，令 $1-\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant\frac{999}{1000}$，即 $\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{1000}$，即 $(n+1)^2\geqslant1000$，当 $n=30$ 时，$31^2=961<1000$；当 $n=31$ 时，$32^2=1024>1000$，故 $n\geqslant31$，因此不等式 $S_n\geqslant\frac{999}{1000}$ 成立的正整数 n 的最小值为 31. ……………………… 12分

20.【解析】(1)在 $\triangle ABC$ 中，根据余弦定理得 $AC^2=1+4-2\times1\times2\times\cos60^\circ=3$，故 $BC^2=AB^2+AC^2$，因此 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$. 当 $EM\perp FM$ 时，在 $\triangle BEM$ 中，$\frac{BM}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{EM}{\sin60^\circ}$，即 $EM=\frac{\sin60^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$；在 $\triangle CFM$ 中，$\angle CMF=90^\circ-\theta$，$\angle CFM=60^\circ+\theta$，$\frac{CM}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{FM}{\sin30^\circ}$，即 $FM=\frac{\sin30^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}=\frac{1}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$，故 $EM=\sqrt{3}FM$；…………………………… 6分

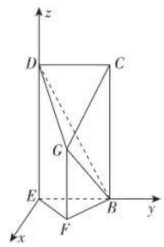
(2)当 $\angle EMF=60^\circ$ 时，在 $\triangle BEM$ 中，$\frac{BE}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)}$，即 $BE=\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ+\theta)}$；在 $\triangle CFM$ 中，$\angle CMF=120^\circ-\theta$，$\angle CFM=30^\circ+\theta$，$\frac{CF}{\sin(120^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin(30^\circ+\theta)}$，即 $CF=\frac{\sin(120^\circ-\theta)}{\sin(30^\circ+\theta)}$. 故 $S_{\triangle BEM}+S_{\triangle CFM}=\frac{1}{2}BE\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}CF\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{4}[\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sin(60^\circ+\theta)}+\frac{\sin(120^\circ-\theta)}{\sin(30^\circ+\theta)}]=\frac{1}{4}[\sqrt{3}+2\times\frac{1-\cos2\theta}{\sqrt{3}+2\sin2\theta}]$，所以四边形 $AEMF$ 面积 $S(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}-S_{\triangle BEM}-S_{\triangle CFM}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{\cos2\theta-1}{\sqrt{3}+2\sin2\theta}(0<\theta<\frac{\pi}{3})$，$S'(\theta)=\frac{2(\cos2\theta-1)-\sqrt{3}\sin2\theta}{(\sqrt{3}+2\sin2\theta)^2}<0$，故 $S(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递减，$S(0)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$S(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{8}$，故 $S(\theta)\in(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{4})$. ……………………………… 12分

21.【解析】(1)取 BD，BE 的中点分别为 O，M，连结 GO，OM，MF. $OM\parallel DE$ 且 $OM=\frac{1}{2}DE$，又因为 $GF\parallel DE$ 且 $GF=\frac{1}{2}DE$，所以 $GF\parallel OM$ 且 $GF=OM$，故四边形 $OGFM$ 为平行四边形，故 $GO\parallel FM$. 因为 M 为 EB 中点，三角形 BEF 为等边三角形，故 $FM\perp EB$，因为平面 $EFB\perp$ 平面 $BCDE$，故 $FM\perp BCDE$ 平面，因此 $GO\perp BCDE$ 平面，故平面 $GBD\perp$ 平面 $BCDE$；



…………………………………………………… 5分

(2)建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,1,0)$，$C(0,1,2)$，$D(0,0,2)$，$G(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，



则 $\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$，

$\overrightarrow{CG}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-1)$，

$\overrightarrow{CB}=(0,0,-2)$，

设平面 CDG 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-y_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1-z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$ 得 $\boldsymbol{m}=(1,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$；

设平面 CBG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-2z_2=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2-z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},0)$.

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，

故二面角 $B-GC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=e^x-\sin x-a$，

由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x>0$ 时，$e^x-\sin x-a\geqslant 0$ 恒成立，

即 $a\leqslant e^x-\sin x$ 恒成立.

设 $h(x)=e^x-\sin x(x>0)$，$h'(x)=e^x-\cos x$，

因为 $x>0$，所以 $e^x>1$，$\cos x\leqslant 1$，

所以 $e^x-\cos x>0$，即 $h'(x)>0$.

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)>h(0)=1$，故 $a\leqslant 1$；………………… 6 分

(2) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x+\cos x+x$，

$f'(x)=e^x-\sin x+1>0$，

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

又因为 $f(0)=2$ 且 $f(x_1)+f(x_2)=4$，

故 $x_1<0<x_2$.

要证 $x_1+x_2<0$，只需证 $x_2<-x_1$，

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

故只需证 $f(x_2)<f(-x_1)$，

即只需证 $4-f(x_1)<f(-x_1)$，

即只需证 $f(-x_1)+f(x_1)-4>0$.

令 $g(x)=f(-x)+f(x)-4(x<0)$，$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=e^x-\sin x+1-e^{-x}-\sin x-1=e^x-e^{-x}-2\sin x$，

令 $\varphi(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，

则 $\varphi'(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x>2-2\cos x\geqslant 0$，

所以 $\varphi(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

故 $g(x)>g(0)=2f(0)-4=0$，

故原不等式成立. ……………………………… 12 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html