2022届高三第一次联考
数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	C	D	A	B	AC	ABD	BC	ACD

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由正弦函数的单调性可知，当 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 时，$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 反之，当 $0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，可能有 $\theta=\frac{5\pi}{6}>\frac{\pi}{3}$，所以"$0<\theta<\frac{\pi}{3}$"是"$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$"的充分不必要条件，选A.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}-1+2i=i-1-1+2i=-2+3i$，则复数 z 在复平面内对应的点 $Z(-2,3)$ 位于第二象限，选B.

3. D 【解析】对于A，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，结论不成立，命题为假；对于B，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，结论不成立，命题为假；对于C，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，结论不成立，命题为假；对于D，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}|^2>|\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2$，则 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$，命题为真. 选D.

4. C 【解析】由已知，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=2^x$ 互为反函数，则 $f(x)=\log_2 x$. 由题设，当 $x>0$ 时，$g(x)=\log_2 x-x$，则 $g(8)=\log_2 8-8=3-8=-5$. 因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(-8)=-g(8)=5$，选C.

5. C 【解析】抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$，分别过点 A,B 作 y 轴的垂线，垂足为 A_1,B_1，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|AF|-1}{|BF|-1}=3$，所以 $S_1=3S_2$，选C.

6. D 【解析】由已知，$\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}+\lambda\sin 20^\circ=3$，则 $\sqrt{3}\sin 20^\circ+\lambda\sin 20^\circ\cos 20^\circ=3\cos 20^\circ$，从而 $\frac{\lambda}{2}\sin 40^\circ=3\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ=2\sqrt{3}\sin(60^\circ-20^\circ)=2\sqrt{3}\sin 40^\circ$，所以 $\lambda=4\sqrt{3}$，选D.

7. A 【解析】取 AB 的中点 H，则 $BH\mathrel{\underline{\parallel}}C_1G$，从而四边形 BC_1GH 为平行四边形，所以 $BC_1\parallel HG$. 易知 $EH\mathrel{\underline{\parallel}}GF$，则四边形 $EGFH$ 为平行四边形，从而 $GH\subset$ 平面 EFG. 又 $BC_1\not\subset$ 平面 EFG，所以 $BC_1\parallel$ 平面 EFG. 易知 $BF\mathrel{\underline{\parallel}}ED_1$，则四边形 BFD_1E 为平行四边形，从而 BD_1 与 EF 相交，所以直线 BD_1 与平面 EFG 相交，选A.

8. B 【解析】由已知，$ae^{a+1}<b(\ln b-1)=b\ln\frac{b}{e}$，则 $e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$. 设 $f(x)=x\ln x$，则 $f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$. 因为 $a>0$，则 $e^a>1$. 又 $b(\ln b-1)>0$，$b>0$，则 $\ln b>1$，即 $b>e$，从而 $\frac{b}{e}>1$. 当 $x>1$ 时，$f'(x)=\ln x+1>0$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增，所以 $e^a<\frac{b}{e}$，即 $b>e^{a+1}$，选B.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

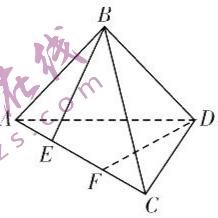
9. AC 【解析】由图知，$f(x)$ 的最小正周期为 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，结论A正确；因为 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$A=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小零点，则 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 从而 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$不是偶函数. 结论 B 错误;因为 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 内的最小值为 1. 结论 C 正确;因为 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(-\pi)=0$, 则 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的零点. 结论 D 错误. 选 AC.

10. ABD 【解析】去掉 9 个原始评分中的一个最高分和一个最低分,不会改变该组数据的中位数,A 正确;因为学生网络评分在区间[8,9)内的频率为 0.3,学生总人数为 4000,则网络评分在区间[8,9)内的学生估计有 $4000\times0.3=1200$ 人,B 正确;若去掉的一个最高分为 9.6,去掉的一个最低分为 8.9,则 9 名教师原始评分的极差等于 0.7,C 错误;学生网络评分在区间[9,10]内的频率为 0.5,则 $X\sim B(10,0.5)$,所以 $E(X)=10\times0.5=5$,D 正确;选 ABD.

11. BC 【解析】当 $a=3,b=2$ 时,双曲线的渐近线的斜率 $k=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{2}{3}$,A 错误;因为点 $P(2,4\sqrt{2})$ 在 C 上,则 $\frac{4}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1$,得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{4}+8>8$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>3$,B 正确;因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,若 $PF_1\perp PF_2$,则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$,即 $(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$,即 $4a^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$,得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2(c^2-a^2)=2b^2$,所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2$,C 正确;若 C 为等轴双曲线,则 $a=b$,从而 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{2}a$. 若 $|PF_1|=2|PF_2|$,则 $|PF_2|=2a$,$|PF_1|=4a$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{16a^2+4a^2-8a^2}{2\times4a\times2a}=\frac{3}{4}$,D 错误. 选 BC.

12. ACD 【解析】如图,因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是以 AC 为斜边的直角三角形,则 AC 为四面体 $ABCD$ 外接球的直径. 因为 $AB=2$,$BC=2\sqrt{3}$,则 $2R=AC=4$,所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=16\pi$,A 正确;分别作 $BE\perp AC$,$DF\perp AC$,垂足为 E,F,则 $\theta=\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}\rangle$. 由已知可得,$EB=FD=\sqrt{3}$,$AE=CF=1$,$EF=2$. 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$,则 $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD}$ $=3+4+3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=8$,所以 $|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$,B 错误;因为 $CD^2+BD^2=12=BC^2$,则 $CD\perp BD$. 同理,$AB\perp BD$. 又 $CD\perp AD$,则 $CD\perp$ 平面 ABD,所以 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,C 正确;由已知可得,$\angle CAD=30^\circ$,$\angle CAB=60^\circ$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\times2\sqrt{3}\cos30^\circ-4\times2\cos60^\circ=8$,则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{8}{4\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=45^\circ$,所以异面直线 AC 与 BD 所成的角为 45°,D 正确. 选 ACD.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

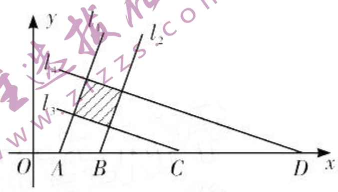
13. -2 【解析】因为 $f'(x)=e^{x-1}+3x^2$,则 $f'(1)=4$. 又 $f(1)=2$,则切线方程为 $y-2=4(x-1)$,即 $y=4x-2$,所以该切线在 y 轴上的截距为 -2.

14. 729 【解析】因为 $T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$,由已知 $\frac{n-6}{2}=0$,则 $n=6$. 因为 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的绝对值之和与 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和相等,取 $x=1$,得 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和为 $3^6=729$.

15. $m-1$ 【解析】由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，得 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，即 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $S_{2021}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{2023}-a_{2022})=a_{2023}-a_2=m-1$.

16. $\frac{16}{17}$或$\frac{36}{5}$或$\frac{196}{53}$(三个结果只要求填写两个，不考虑数据排序，填对 1 个得 3 分，填对 2 个得 5 分)

【解析】不妨设正方形的四条边所在的直线分别为 l_1、l_2、l_3、l_4，它们分别经过点 A、B、C、D，直线 l_1 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，正方形的边长为 a.



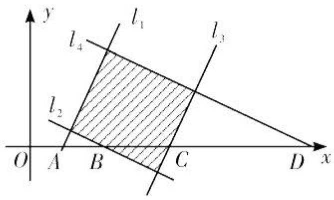
①若 $l_1/\!/l_2$，则 $l_3/\!/l_4$，且 $l_3\perp l_1$，从而 l_3 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AB|=1$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\sin\theta$，所以 $a=\sin\theta$.

因为 $|CD|=4$，则 l_3 与 l_4 之间的距离为 $4\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\cos\theta$，

所以 $a=4\cos\theta$.

令 $\sin\theta=4\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=16\cos^2\theta=16(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{16}{17}$，则正方形面积 $S=\sin^2\theta=\frac{16}{17}$.



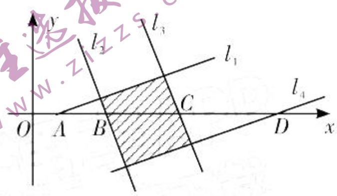
②若 $l_1/\!/l_3$，则 $l_2/\!/l_4$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AC|=3$，则 l_1 与 l_3 之间的距离为 $3\sin\theta$，所以 $a=3\sin\theta$.

因为 $|BD|=6$，则 l_2 与 l_4 之间的距离为 $6\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=6\cos\theta$.

所以 $a=6\cos\theta$. 令 $3\sin\theta=6\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$，

则正方形面积 $S=9\sin^2\theta=\frac{36}{5}$.



③若 $l_1/\!/l_4$，则 $l_2/\!/l_3$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AD|=7$，则 l_1 与 l_4 之间的距离为 $7\sin\theta$，所以 $a=7\sin\theta$.

因为 $|BC|=2$，则 l_2 与 l_3 之间的距离为 $2\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos\theta$.

所以 $a=2\cos\theta$.

令 $7\sin\theta=2\cos\theta$，则 $49\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{53}$，则正方形面积 $S=49\sin^2\theta=\frac{196}{53}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)由已知，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……… (2 分)

则 $g(x)=f(-x)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以当 $g(x)$ 单调递减时，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增. ………………………………………………… (3 分)

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ……………………………………… (5 分)

(2)因为 $f(A)=\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，则 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………（6 分）

又 $a=\sqrt{3}$，由余弦定理，得 $3=b^2+c^2-bc$，即 $b^2+c^2=bc+3$. ……………………………………………（7 分）

因为 D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}(2bc+3)$. ……………………（8 分）

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，则 $bc+3\geqslant 2bc$，即 $0<bc\leqslant 3$，所以 $\frac{3}{4}<|\overrightarrow{AD}|^2\leqslant\frac{9}{4}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<|\overrightarrow{AD}|\leqslant\frac{3}{2}$.

所以线段 AD 的长的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$. ……………………………………………（10 分）

18.【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_1=3$，则 $S_3=3a_1+3d=9+3d$. ……………………（2 分）

因为 $S_5=5a_1=15$，则 $9+3d=15$，得 $d=2$. ……………………………………………（3 分）

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$. ……………………………………………（4 分）

(2)因为 $S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$，则 $b_n=1+\frac{2}{S_n}=1+\frac{2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. ………………（6 分）

所以 $T_n=n+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. ……………………………………………（8 分）

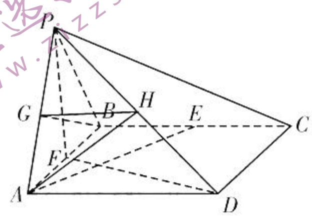
当 $n\leqslant 2$ 时，因为 $-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<0$，则 $[T_n]=n$. ……………………………………………（9 分）

当 $n\geqslant 3$ 时，因为 $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$，则 $[T_n]=n+1$. ……………………………………………（10 分）

因为 $[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$，则 $1+2+4+5+\cdots+(n+1)=63$，即 $3+\frac{(n-2)(4+n+1)}{2}=63$，

即 $n^2+3n-130=0$，即 $(n-10)(n+13)=0$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=10$. ……………………………………（12 分）

19.【解析】(1)解法一：取 AB 的中点 F，连接 PF，DF.



因为 $PB=AB$，$\angle PBA=60°$，则 $\triangle PAB$ 为正三角形，所以 $PF\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，则 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PF\perp AE$.　① ……………………………………（2 分）

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 BC 的中点，则

$Rt\triangle DAF\cong Rt\triangle ABE$，所以 $\angle ADF=\angle BAE$.

从而 $\angle ADF+\angle EAD=\angle BAE+\angle EAD=\angle BAD=90°$.

所以 $DF\perp AE$.　② ……………………………………………（4 分）

结合①②知，$AE\perp$ 平面 PDF，所以 $AE\perp PD$. ……………………………………………（5 分）

解法二：因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，则

$AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AP$，从而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. ……………………………………（2 分）

因为 $PB=AB$，$\angle PBA=60°$，则 $\triangle PAB$ 为正三角形.

设 $AB=2$，则 $AD=AP=2$. ……………………………………………（3 分）

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2-4\cos 60°=0$，

则 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PD}$，所以 $AE\perp PD$. ……………………………………………（5 分）

(2)解法一：分别取 PA，PD 的中点 G，H，则 $GH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$.

又 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$，则 $GH \mathrel{\underline{\parallel}} BE$，所以四边形 $BGHE$ 为平行四边形，从而 $EH \parallel BG$. ························ (6 分)

因为 $PB=AB$，则 $BG \perp PA$. 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，$AD \perp AB$，则 $AD \perp$ 平面 PAB.

从而 $AD \perp BG$，所以 $BG \perp$ 平面 PAD，从而 $EH \perp$ 平面 PAD.

连接 AH，则 $\angle EAH$ 为直线 AE 与平面 PAD 所成的角. ································· (8 分)

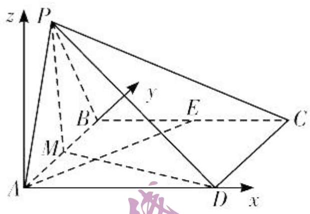
设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PA=x(0<x<2)$，则 $BE=GH=\frac{1}{2}$，$AG=\frac{x}{2}$.

从而 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$AH=\sqrt{AG^2+GH^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. ································ (10 分)

在 Rt$\triangle AHE$ 中，$\cos\angle EAH=\frac{AH}{AE}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$.

因为当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$ 单调递增，则 $\cos\angle EAH\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$.

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ································ (12 分)



解法二：以直线 AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，过点 A 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系. ································ (6 分)

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$. ······ (7 分)

在平面 PAB 内过点 P 作 AB 的垂线，垂足为 M.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，则 $PM \perp$ 平面 $ABCD$.

设 $AM=a(0<a<2)$，则 $BM=|1-a|$.

因为 $PB=1$，则 $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}$，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,a,\sqrt{2a-a^2})$. ······ (8 分)

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PAD 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ ay+\sqrt{2a-a^2}\,z=0.\end{cases}$

取 $z=-a$，则 $y=\sqrt{2a-a^2}$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2a-a^2},-a)$. ································ (9 分)

于是 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{2a-a^2}$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2a}$.

又 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$. ································ (10 分)

设直线 AE 与平面 PAD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$.

从而 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$. ································ (11 分)

因为函数 $f(a)=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$ 单调递增，则当 $0<a<2$ 时，则 $\cos\theta\in\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$.

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ································ (12 分)

20.【解析】(1)由已知，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$. ………………………………………………………… (1分)

设点 F_1,F_2 关于直线 l 的对称点分别为 M,N，因为点 O,C 关于直线 l 对称，O 为线段 F_1F_2 的中点，

则 C 为线段 MN 的中点，从而线段 MN 为圆 C 的一条直径，所以 $|F_1F_2|=|MN|=2$，即 $2c=2$，即 $c=1$.

…… (3分)

于是 $a=2,b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… (4分)

(2)因为原点 O 为线段 F_1F_2 的中点，圆心 C 为线段 MN 的中点，直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以点 O 与 C 也关于直线 l 对称，

因为点 $C(2m,4m)$，则线段 OC 的中点为 $(m,2m)$，直线 OC 的斜率为 2，又直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以直线 l 的方程为 $y-2m=-\frac{1}{2}(x-m)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$. …………………………………… (6分)

将 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $3x^2+4\left(-\frac{x}{2}+\frac{5m}{2}\right)^2=12$，即 $4x^2-10mx+25m^2-12=0$.

设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{5m}{2},x_1x_2=\frac{25m^2-12}{4}$. ………………………………… (7分)

所以 $k_{AC}+k_{BC}=\frac{y_1-4m}{x_1-2m}+\frac{y_2-4m}{x_2-2m}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+3m}{x_1-2m}+\frac{x_2+3m}{x_2-2m}\right)$

$=-\frac{(x_1+3m)(x_2-2m)+(x_2+3m)(x_1-2m)}{2(x_1-2m)(x_2-2m)}$

$=-\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}$. ………………………………………………………………… (8分)

由已知，$k_{AC}+k_{BC}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}+\frac{2}{3}=0$，得 $2x_1x_2-m(x_1+x_2)-4m^2=0$.

所以 $\frac{25m^2-12}{2}-\frac{5m^2}{2}-4m^2=0$，即 $m^2=1$，即 $m=\pm1$. ………………………………………… (10分)

因为直线 l 与椭圆 E 相交，则 $\Delta=100m^2-16(25m^2-12)>0$，解得 $m^2<\frac{16}{25}$，即 $|m|<\frac{4}{5}$.

因为 $\frac{4}{5}<1$，所以不存在实数 m，使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$. ……………………………… (12分)

21.【解析】(1)设甲同学正确配对 3 对为事件 A，正确配对 5 对为事件 B，甲同学能晋级为事件 C，

则 $C=A+B$，且 A,B 互斥. …………………………………………………………………………… (1分)

因为甲同学只有一组能正确配对，其余四组都随机配对，则 $P(A)=\frac{C_4^2}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$. …… (3分)

从而 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$，所以甲同学能晋级的概率为 $\frac{7}{24}$. ……………………… (4分)

(2)设选择方式一、二的班级团队挑战成功的概率分别为 P_1,P_2.

当选择方式一时，因为两人都回答错误的概率为 $(1-p)^2$，则两人中至少有一人回答正确的概率为

$1-(1-p)^2$，所以 $P_1=[1-(1-p)^2]^n=p^n(2-p)^n$. ………………………………………………… (6分)

当选择方式二时，因为一个小组闯关成功的概率为 p^n，则一个小组闯关不成功的概率为 $1-p^n$，

所以 $P_2=1-(1-p^n)^2=p^n(2-p^n)$. ………………………………………………………………… (7分)

所以 $P_1-P_2=p^n(2-p)^n-p^n(2-p^n)=p^n[(2-p)^n+p^n-2]$. …………………………………… (8分)

设 $f(n)=(2-p)^n+p^n-2$，则 $f(n+1)-f(n)=(2-p)^{n+1}+p^{n+1}-(2-p)^n-p^n$

$=(2-p)^n(1-p)+p^n(p-1)=(1-p)[(2-p)^n-p^n]$. ………………………………（10分）

因为 $0<p<1$，则 $1-p>0$，$2-p>1$，从而 $(2-p)^n>1$，$p^n<1$，所以 $f(n+1)-f(n)>0$，

即 $f(n+1)>f(n)$，所以 $f(n)$ 单调递增. ………………………………（11分）

因为 $f(2)=(2-p)^2+p^2-2=2p^2-4p+2=2(p-1)^2>0$，则当 $n\geq 15$ 时，$f(n)>0$，从而 $P_1-P_2>0$，

即 $P_1>P_2$. 所以为使本班挑战成功的可能性更大，应选择方式一参赛. ………………………………（12分）

22.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\cos x+1(x>0)$. ………………………………（1分）

若 $a>0$，因为 $x>0$，$1-\cos x\geq 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合要求. ………（2分）

若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$\dfrac{a}{x}<-2$，从而 $f'(x)<-2-\cos x+1=-(1+\cos x)\leq 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减，不合要求.

综上分析，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. ………………………………（4分）

(2) 令 $f'(x)=0$，则 $\dfrac{a}{x}-\cos x+1=0$，即 $a=x\cos x-x$.

设 $g(x)=x\cos x-x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-1$. ………………………………（5分）

①当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\cos x<1$，$\sin x>0$，则 $\cos x-1<0$，$-x\sin x<0$，从而 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减.

………………………………（6分）

②当 $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-(2\sin x+x\cos x)$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x<0$，则 $g''(x)>0$，从而 $g'(x)$ 单调递增. 因为 $g'(\pi)=-2<0$，$g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{2}-1>0$，

则 $g'(x)$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，记为 x_0，且当 $x\in(\pi,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增. ………………………………（8分）

③当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'''(x)=-(2\cos x+\cos x-x\sin x)=x\sin x-3\cos x$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x>0$，则 $g'''(x)<0$，从而 $g''(x)$ 单调递减.

因为 $g''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2>0$，$g''(2\pi)=-2\pi<0$，则 $g''(x)$ 在 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 内有唯一零点，记为 x_1，且当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},x_1\right)$ 时，

$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,2\pi)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减.

因为 $g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{2}-1>0$，$g'(2\pi)=0$，则当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增. ……（10分）

综上分析，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,2\pi)$ 上单调递增.

因为 $g(0)=g(2\pi)=0$，则当 $g(x_0)<a<0$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象在 $(0,2\pi)$ 上有两个交点，

从而 $f'(x)$ 有两个变号零点，即 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点.

因为 $g'(x_0)=0$，则 $\cos x_0-x_0\sin x_0-1=0$，即 $\cos x_0=1+x_0\sin x_0$.

从而 $g(x_0)=x_0\cos x_0-x_0=x_0(1+x_0\sin x_0)-x_0=x_0^2\sin x_0$. 取 $\theta=x_0$，则 $\cos\theta=1+\theta\sin\theta$，

且当 $\theta^2\sin\theta<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点. ………………………………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。