参考答案及解析

一、选择题

1. B 【解析】满足 $x=3n+1$ 且 x 为偶数，则 n 为奇数，设 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=3(2k+1)+1=6k+4(k\in\mathbf{Z})$. 故选 B 项.

2. A 【解析】$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(b+a\mathrm{i})=(a^2+b^2)\mathrm{i}$，在平面直角坐标系内对应点为 $(0,a^2+b^2)$，此点在 y 轴上. 故选 A 项.

3. A 【解析】抛物线旋转之后的标准形式为 $x^2=\frac{1}{2}y$，将其绕顶点逆时针旋转 90° 后为原抛物线，其方程为 $y^2=-\frac{1}{2}x$，则 $p=-\frac{1}{4}$. 故选 A 项.

4. C 【解析】两个平面平行时，一个面内的任一条直线会平行于另一个平面. 故选 C 项.

5. D 【解析】设 $|\boldsymbol{b}|=t$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=t^2+1$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{t^2+1}$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2=4t^2+1$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{4t^2+1}$，$|\boldsymbol{a}+2\sqrt{2}\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{b}^2=8t^2+1$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\sqrt{2}\boldsymbol{b}|=\sqrt{8t^2+1}$，由题意，$2\sqrt{4t^2+1}=\sqrt{t^2+1}+\sqrt{8t^2+1}$，解得 $t^2=0$ 或 $t^2=\frac{8}{17}$，所以 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{34}}{17}$. 故选 D 项.

6. D 【解析】按以下方式进行分类：一：五天中有三天，既有太极拳又有形意拳，剩下两天每天只能排长拳与兵器，则有 $C_5^3A_2^2A_2^2A_2^2A_2^2A_2^2$；二：五天中有两天既有太极拳又有形意拳，则有 $C_5^3C_3^2A_2^2A_2^2C_2^1A_2^2C_2^1A_2^2A_2^2$；三：五天中有一天既有太极拳又有形意拳，则有 $C_5^1A_2^2C_4^2C_4^2A_2^2A_2^2A_2^2A_2^2$，相加得 9 920 种排课方式. 故选 D 项.

7. B 【解析】设函数为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，由图像 $\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，若 $\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{4}T$，则 $T=2\pi$，$\omega=1$，将 $\left(\frac{5\pi}{3},-1\right)$ 代入，得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，此时 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，A 项正确；若 $\frac{3\pi}{2}=\frac{7}{4}T$，则 $T=\frac{6\pi}{7}$，$\omega=\frac{7}{3}$，将 $\left(\frac{5\pi}{3},-1\right)$ 代入，得 $\varphi=-\frac{7\pi}{18}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，此时 $f(x)=\sin\left(\frac{7x}{3}-\frac{7\pi}{18}\right)$，C 项正确；若 $\frac{3\pi}{2}=\frac{11}{4}T$，则 $T=\frac{6\pi}{11}$，$\omega=\frac{11}{3}$，将 $\left(\frac{5\pi}{3},-1\right)$ 代入，得 $\varphi=-\frac{11\pi}{18}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，此时 $f(x)=\sin\left(\frac{11x}{3}-\frac{11\pi}{18}\right)$，D 项正确. 故选 B 项.

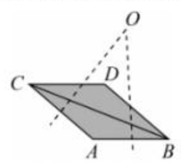
8. A 【解析】因为 $\ln x\leqslant x-1$，所以 $a=\ln 2.6\leqslant 2.6-1=1.6$，$b=0.5\times 3.24=1.62$，$c=1.1^5=(1+0.1)^5=C_5^0+C_5^1(0.1)^1+C_5^2(0.1)^2+C_5^3(0.1)^3+C_5^4(0.1)^4+C_5^5(0.1)^5=1+0.5+0.1+0.01+0.000\,5+0.000\,01\approx 1.61$，所以 $b>c>a$. 故选 A 项.

二、选择题

9. AC 【解析】根据众数和中位数定义，A 项正确；只有当 A，B 为相互独立事件时才可以用 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，B 项错误；根据定义，$101\times 75\%=75.75$，则第 76 个数为 75% 分位数，C 项正确；若 $a\geqslant 0$，正确，若 $a<0$，左式 $=0$，右式 <0，不相等，D 项错误. 故选 AC 项.

10. AD 【解析】对于 A 项，$a+b=2\Rightarrow(a+1)+(b+1)=4$，$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)[(a+1)+(b+1)]=\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{a+1}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(2+2)=1$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立，A 项正确；对于 B 项，$ab+a+b=2\Rightarrow ab+a+b+1=3$，$(a+1)(b+1)=3\Rightarrow\frac{1}{b+1}=\frac{a+1}{3}$，$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，不满足题意，B 项错误；对于 C 项，若 $a=b=2$，则 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{2}{3}$，不满足题意，C 项错误；对于 D 项，由基本不等式 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\Rightarrow a+b\leqslant 2$，$\frac{2}{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}}\leqslant\sqrt{\frac{(a+1)^2+(b+1)^2}{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+2(a+b)+2}{2}}\leqslant 2$，所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geqslant 1$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立，D 项正确. 故选 AD 项.

11. ABD 【解析】若 $\lambda+\mu=1$，则点 P 在直线 BC 上. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，BC 为斜边，则外心在边 BC 上，点 P 的轨迹经过外心，A 项错误；若 $B=90^\circ$ 或 $C=90^\circ$，则 $\triangle ABC$ 的垂心为点 B 或点 C，所以点 P 的轨迹经过垂心，B 项错误；若点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，则由重心的性质得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$，与 $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ 矛盾，C 项正确；如图，点 P 的轨迹为阴影部分（平行四边形 $ABDC$ 内部及边界），而 $\triangle ABC$ 的外心 O 在阴影部分以外，D 项错误. 故选 ABD 项.



12. ACD 【解析】$f(-x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$，$f(-x)+f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_a(x^2+1-x^2)=\log_a 1=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数. $g(-x)=2^{f(-x)}+2^{-f(-x)}=2^{-f(x)}+2^{f(x)}=g(x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数，A 项正确；$h(-x)=2^{f(-x)}-2^{-f(-x)}=2^{-f(x)}-2^{f(x)}=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数，B 项错误；$f(x)$ 为奇函数，$f'(x)$ 为偶函数，C 项正确；因为 $\sqrt{x^2+1}>|x|\geqslant x$，所以 $\sqrt{x^2+1}+x>2x$，因为 $a\in(1,2]$，$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)>\log_a(2x)=\dfrac{\log_2(2x)}{\log_2 a}$，又 $\log_2 a\in(0,1]$，$x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $\dfrac{\log_2(2x)}{\log_2 a}\geqslant\log_2(2x)$，即 $f(x)>\log_2(2x)$，D 项正确. 故选 ACD 项.

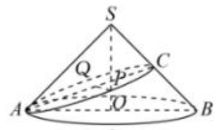
三、填空题

13. 1 680 【解析】$(\sqrt[3]{3}-2)^7$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r(3^{\frac{1}{3}})^{7-r}(-2)^r=C_7^r 3^{\frac{7-r}{3}}(-2)^r$，若为有理项，则 $\dfrac{7-r}{3}\in\mathbf{Z}$，$r=1,4,7$，第二个有理项为 $C_7^4\cdot 3^1(-2)^4=1\ 680$.

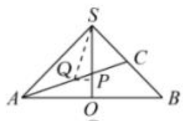
14. 76 【解析】本题直接由题意列举 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=1$，$a_5=4$，$a_6=3$，$a_7=7$，$a_8=4$，$a_9=11$，$a_{10}=7$，$a_{11}=18$，$a_{12}=11$，$a_{13}=29$，$a_{14}=18$，$a_{15}=47$，$a_{16}=29$，$a_{17}=76$，$a_{18}=47$，$a_{19}=123$，$a_{20}=76$.

15. 必要不充分条件 【解析】α,β,γ 为某斜三角形的三个内角，则 $\alpha+\beta=\pi-\gamma$. 所以 $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\gamma)=-\tan\gamma$，$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan\gamma$，整理得 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$，又此三角形为斜三角形，无需考虑直角，所以必要性成立. 若 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$，则 $\tan\alpha(1-\tan\beta\tan\gamma)=-(\tan\beta+\tan\gamma)$，则 $-\tan\alpha=\dfrac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\tan(\beta+\gamma)$，若 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$，上式也成立，但不能作为三角形的三个内角，所以充分性不成立. 故应为必要不充分条件.

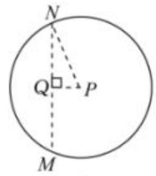
16. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】设 $SC=1$，则 $SB=2$，$OB=\sqrt{2}$，所以 $SO=\sqrt{2}$，所以 $\triangle ASB$ 为等腰直角三角形. 易知 AC 为椭圆的长轴，则 $2a=AC=\sqrt{5}$. 如图①，设椭圆的中心为 Q，过点 Q 作 $QP\perp SO$ 于点 P. 作出轴截面 SAB 的平面图，如图②，连接 SQ. 因为 Q 为 AC 的中点，$\triangle ASC$ 为直角三角形，所以 $SQ=AQ=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 设 $\angle SAQ=\angle ASQ=\alpha$，则 $\cos\alpha=\dfrac{SQ^2+SA^2-AQ^2}{2\times SQ\times SA}=\dfrac{4}{2\times2\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 设 $\angle QSP=\beta$，因为 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $SP=SQ\cdot\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$PQ=\sqrt{SQ^2-SP^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 过直线 QP 作平行于底面的截面，截面圆如图③，过 Q 作 PQ 的垂线交截面圆于 M,N 两点，此时 MN 为椭圆的短轴. 连接 PN，易得 $PN=SP=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，所以 $QN=\sqrt{PN^2-PQ^2}=\sqrt{\dfrac{18}{16}-\dfrac{2}{16}}=1$，所以 $MN=2b=2$，则 $b=1$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



①



②



③

四、解答题

17. **解**：(1) 由正弦定理得 $2\sin C=\sin A+\sqrt{2}\sin B$，

所以 $2\sin C=\sin A+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. (1 分)

因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

所以 $2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (4 分)

又 $A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $C=\dfrac{5\pi}{12}$. (5 分)

(2) 由正弦定理得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径满足 $2R=\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}$. (6 分)

因为 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$AD\perp BC$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $\angle CAD=\dfrac{\pi}{12}$.

因为 $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，（8分）

所以 $CD=2R\cdot\sin\frac{\pi}{12}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{3}-2$.

（10分）

18. **解**：(1)由题意得点 P_{n+1} 的坐标为 $(n+1,a_{n+1})$.

因为 P_n,P_{n+1} 均在一条斜率为2的直线上，

所以 $2=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，（2分）

所以 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$.（3分）

若选①，设数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

$T_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_{n-1}=(2n-5)\cdot 2^{n-1}+3$，

所以 $a_n\cdot b_n=T_n-T_{n-1}=(4n-6-2n+5)\cdot 2^{n-1}=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$.

经检验，当 $n=1$ 时，$a_1\cdot b_1=T_1=1$，也符合上式.（5分）

所以 $a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $b_n=2^{n-1}$.（6分）

若选②，设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，

$T_n=6-\frac{4n+6}{2^n}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$T_{n-1}=6-\frac{4n+2}{2^{n-1}}$，

所以 $\frac{a_n}{b_n}=T_n-T_{n-1}=\frac{4n-2}{2^n}$，

经检验，当 $n=1$ 时，$\frac{a_1}{b_1}=T_1=1$，也符合上式.（5分）

所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{4n-2}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $b_n=\frac{a_n\cdot 2^n}{4n-2}=2^{n-1}$.

（6分）

若选③，设数列 $\{a_n-b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

$T_n=n^2+1-2^n$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_{n-1}=(n-1)^2+1-2^{n-1}$，

所以 $a_n-b_n=T_n-T_{n-1}=2n-1-2^{n-1}$.

经检验，当 $n=1$ 时，$a_1-b_1=T_1=0$，也符合上式.（5分）

所以 $a_n-b_n=2n-1-2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $b_n=a_n-(2n-1-2^{n-1})=2^{n-1}$.（6分）

(2)由(1)知 $a_{b_n}=2b_n-1=2\times 2^{n-1}-1=2^n-1$，（7分）

$b_{a_n}=2^{2n-1-1}=2^{2n-2}$，（8分）

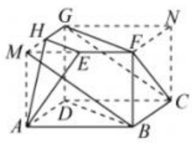
所以 $a_{b_n}\cdot b_{a_n}=(2^n-1)\cdot 2^{2n-2}=2^{3n-2}-2^{2n-2}=\frac{1}{4}(8^n-4^n)$，（10分）

所以 $S_n=\frac{1}{4}\times\left[\frac{8(1-8^n)}{1-8}-\frac{4(1-4^n)}{1-4}\right]=\frac{2\times 8^n}{7}-\frac{4^n}{3}+\frac{1}{21}$.

（12分）

19. **解**：(1)当 $BF=\sqrt{2}$ 时，$AE\perp CG$. 证明如下：（1分）

将该几何体补全为正四棱柱 $ABCD$-$MFNG$，连接 BM，如下图所示：



由题意可知底面 $ABCD$ 为正方形，则 $AB=BC=2$，且 $BD=2\sqrt{2}$，

因为 $EH\parallel FG$，$EH=\frac{1}{2}FG$，所以 E 为线段 MF 的中点.

因为 $BC\parallel MG$，$BC=MG$，

所以四边形 $BCGM$ 为平行四边形，所以 $CG\parallel BM$.（2分）

因为 $CG\perp AE$，所以 $BM\perp AE$.

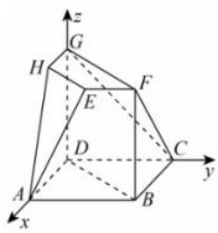
因为 $\angle AMB+\angle MAE=90^\circ$，$\angle MAE+\angle MEA=90^\circ$，

所以 $\angle AMB=\angle MEA$，所以 $\triangle AMB\backsim\triangle MEA$，

所以 $\frac{ME}{AM}=\frac{AM}{AB}$，即 $AM^2=ME\cdot AB=1\times 2=2$，所以 $AM=\sqrt{2}$，

所以当 $BF=\sqrt{2}$ 时，$AE\perp CG$.（4分）

(2)以 D 为坐标原点，分别以 DA,DC,DG 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



由(1)知 $AB=2$，

又 $A(2,0,0)$，$E(2,1,2)$，$H(1,0,2)$，$C(0,2,0)$，$F(2,2,2)$，$G(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{EH}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{CF}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{CG}=(0,-2,2)$.（6分）

设平面 AEH 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{EH}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1+2z_1=0,\\ -x_1-y_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=2$，$y_1=-2$，所以 $\boldsymbol{m}=(2,-2,1)$.

（8分）

设平面 CFG 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2+2z_2=0,\\ -2y_2+2z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=-1$，则 $y_2=1$，$z_2=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$.

（10分）

设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由图知平面 AEH 与平面 CFG 所成的角为锐角，

所以平面 AEH 与平面 CFG 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.（12 分）

20. **解**：(1)由题得 $\chi^2=\frac{50\times(20\times15-10\times5)^2}{25\times25\times30\times20}\approx8.333>6.635$，

故有 99%的把握认为喜欢哪种机型与性别有关.（3 分）

(2)由题意 $324:216:108=3:2:1$，

所以 12 人中有青年 6 人，中年 4 人，老年 2 人.（4 分）

X 的取值范围是 $\{0,1,2,3\}$，

$P(X=0)=\frac{C_6^0C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{11}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_6^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$，（6 分）

$P(X=2)=\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$，$P(X=3)=\frac{C_6^3C_6^0}{C_{12}^3}=\frac{1}{11}$.（8 分）

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$

（10 分）

$E(X)=0\times\frac{1}{11}+1\times\frac{9}{22}+2\times\frac{9}{22}+3\times\frac{1}{11}=\frac{3}{2}$.（12 分）

21. **解**：(1)由题意得 $2c=2\sqrt{5}$，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $a=2,b=1,c=\sqrt{5}$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.（4 分）

(2)如图，易知直线 OM 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，直线 ON 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，设 $P(x_0,y_0)$，

则 $|PM|=\frac{\left|\frac{1}{2}x_0-y_0\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left|\frac{1}{2}x_0-y_0\right|$，

$|PN|=\frac{\left|\frac{1}{2}x_0+y_0\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left|\frac{1}{2}x_0+y_0\right|$，

所以 $|PM|\cdot|PN|=\frac{4}{5}\times\left|\frac{1}{4}x_0^2-y_0^2\right|=\frac{4}{5}$.（6 分）

因为 $k_{OM}=-k_{ON}=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan\angle MON=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$.

因为 $AP\parallel ON$，$BP\parallel OM$，

所以 $\tan\angle MAP=\tan\angle MON=\tan\angle NBP=\frac{4}{3}$，（7 分）

所以 $S_{\triangle MAP}=\frac{1}{2}|MP|\cdot|MA|=\frac{1}{2}|MP|\cdot\frac{|MP|}{\tan\angle MAP}=\frac{3}{8}|MP|^2$，

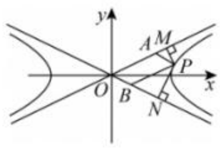
$S_{\triangle NBP}=\frac{1}{2}|PN|\cdot|BN|=\frac{1}{2}|PN|\cdot\frac{|PN|}{\tan\angle NBP}=\frac{3}{8}|PN|^2$，

所以 $S_{\triangle MAP}\cdot S_{\triangle NBP}=\frac{9}{64}\cdot|PM|^2\cdot|PN|^2=\frac{9}{100}$.（10 分）

所以 $S_1-S_2=S_{四边形OMPN}-S_{四边形OAPB}=S_{\triangle MAP}+S_{\triangle NBP}\geqslant 2\sqrt{S_{\triangle MAP}\cdot S_{\triangle NBP}}=\frac{3}{5}$，当且仅当 $S_{\triangle MAP}=S_{\triangle NBP}=\frac{3}{10}$，

即点 P 在 C 的顶点处时等号成立.

所以 S_1-S_2 的取值范围为 $\left[\frac{3}{5},+\infty\right)$.（12 分）



22. **解**：(1)设 $t=\sqrt{x}$，$t\in(0,+\infty)$，$F(t)=2\ln t-\left(t-\frac{1}{t}\right)$，

则 $F'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}\leqslant0$，

所以 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.（2 分）

又 $F(1)=0$，所以当 $t\in(0,1)$ 时，$F(t)>0$，

则 $2\ln t>t-\frac{1}{t}$，即 $\ln x>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$F(t)<0$，

则 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$，即 $\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$；

当 $t=1$ 时，$F(1)=0$，即 $\ln x=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.（3 分）

故当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>g(x)$；当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$.（4 分）

(2)设 $h(x)=\ln x-k\left(x-\frac{1}{x}\right)=\ln x-kx+\frac{k}{x}(x>0)$.

因为 $h(1)=0$，所以 $h(x)$ 有一个零点为 1.

当 $k\leqslant0$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-k-\frac{k}{x^2}>0$，

$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $k>0$.（6 分）

又 $h'(x)=\frac{1}{x}-k-\frac{k}{x^2}=\frac{-kx^2+x-k}{x^2}$，

设 $H(x)=-kx^2+x-k(k>0)$，若 $\Delta\leqslant 0$，则 $h(x)$ 单调，所以 $\Delta>0$，即 $1-4k^2>0$，解得 $0<k<\frac{1}{2}$，

所以 $k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. （7分）

下面证明当 $k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

设 $H(x)$ 的两个零点分别为 x_1,x_2，

则 $x_1+x_2=\frac{1}{k}>0,x_1x_2=1>0$，所以 $x_1,x_2>0$.

设 $x_1<x_2$，则 $x_1\in(0,1),x_2\in(1,+\infty)$，

所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减. （8分）

因为 $x_1<1<x_2,h(1)=0$，所以 $h(x_1)<0,h(x_2)>0$，

由(1)知，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x-kx+\frac{k}{x}<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-kx+\frac{k}{x}=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\frac{k(x^2-1)}{x}=\frac{x-1}{x}(-kx+\sqrt{x}-k)$.

令 $-kx+\sqrt{x}-k=0$，则 $\sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{1-4k^2}}{2k}$，

当 $x>\left(\frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)^2>1$ 时，$\frac{x-1}{x}(-kx+\sqrt{x}-k)<0$.

而 $h(x_2)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内存在一个零点. （9分）

当 $0<x<\left(\frac{1-\sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)^2<1$ 时，$-kx+\sqrt{x}-k<0$，$\frac{x-1}{x}(-kx+\sqrt{x}-k)>0$.

而 $h(x_1)<0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x-kx+\frac{k}{x}>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-kx+\frac{k}{x}=\frac{x-1}{x}(-kx+\sqrt{x}-k)$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在一个零点. （11分）

综上所述，当 $k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h(x)$ 有三个零点，

即方程 $\ln x=k\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 有三个实根. （12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。