

郑州市 2023 年高中毕业年级第一次质量预测 理科数学试题卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x | y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}\}$, $B = \{x | \log_3(x-1) < 1\}$. 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | 3 < x \leq 4\}$
 C. $\{x | 1 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 3 \leq x < 4\}$
2. 已知 i 是虚数单位,若复数 z 的实部为 1, $z \cdot \bar{z} = 4$, 则复数 z 的虚部为
 A. $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{15}$ 或 $\sqrt{15}$
 C. -1 或 1 D. $-\sqrt{15}i$ 或 $\sqrt{15}i$
3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 则其渐近线方程为
 A. $x \pm y = 0$ B. $x \pm \sqrt{3}y = 0$
 C. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ D. $2x \pm y = 0$
4. 欧拉函数 $\varphi(n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 的函数值等于所有不超过正整数 n , 且与 n 互素 (也称互质) 的正整数的个数, 例如 $\varphi(1) = 1, \varphi(4) = 2, \varphi(9) = 6$. 则
 A. 数列 $\{\varphi(n)\}$ 单调 B. $\varphi(5) < \varphi(6)$
 C. 数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 是等比数列 D. $\varphi(6) = \varphi(2) + \varphi(3)$
5. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y + 1 \leq 0, \\ x + y - 5 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的
 A. 最大值为 4 B. 最小值为 4

高三理科数学试题卷 第 1 页 (共 6 页)

C. 最大值为 5

D. 最小值为 5

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $S_8 \geq S_7 \geq S_9$, 则公差 d 的取值范围是

A. $[-\frac{2}{7}, -\frac{4}{15}]$

B. $[-\frac{2}{7}, -\frac{1}{4}]$

C. $[-\frac{4}{15}, -\frac{1}{4}]$

D. $[-\frac{2}{7}, 0]$

7. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\pi < T < 2\pi$, 且

$y = f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$, 关于该函数有下列四个说法:

① $2 < \omega < 3$;

② $f(\frac{\pi}{2}) = 0$;

③ $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增;

④ 为了得到 $g(x) = \sin \omega x$ 的图象, 只需将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

以上四个说法中, 正确的个数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

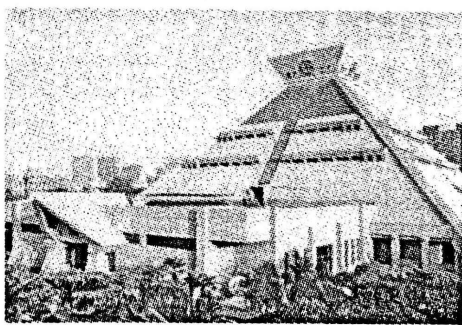
8. 河南博物院主展馆的主体建筑以元代登封古观星台为原型, 经艺术夸张演绎成“戴冠的金字塔”造型, 冠部为“方斗”形, 上扬下覆, 取上承“甘露”、下纳“地气”之意. 冠部以及冠部下方均可视为正四棱台. 已知一个“方斗”的上底面与下底面的面积之比为 $1:4$, 高为 2, 体积为 $\frac{56}{3}$, 则该“方斗”的侧面积为

A. 24

B. 12

C. $24\sqrt{5}$

D. $12\sqrt{5}$



9. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知角 $C = \frac{\pi}{4}$, $b \sin(\frac{\pi}{4} +$

$A) - a \sin(\frac{\pi}{4} + B) = c$, 则角 $B =$

高三理科数学试题卷 第 2 页 (共 6 页)

A. $\frac{\pi}{8}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{5\pi}{8}$

D. $\frac{\pi}{3}$

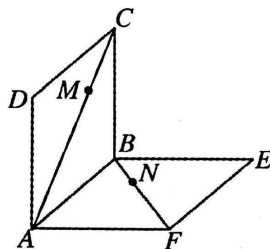
10. 在如图所示的实验装置中,两个正方形框架 $ABCD, ABEF$ 的边长都为 1,且它们所在的平面互相垂直. 活动弹子 M, N 分别在正方形对角线 AC 和 BF 上移动,且 CM 和 BN 的长度保持相等,记 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$. 则下列结论错误的是 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

A. 该模型外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时, MN 的长度最小

C. 异面直线 AC 与 BF 所成的角为 60°

D. $MN \parallel$ 平面 BCE



11. 已知直线 l 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, $OA \perp OB$, $OH \perp AB$ 交 AB 于点 H , 点 H 的坐标为 $(2, 2)$, 则 p 的值为

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. 3

12. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为偶函数, $f(x+2)$ 为奇函数, 且满足 $f(1)+f(2)=2$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=$

A. -2023

B. 0

C. 2

D. 2023

二、填空题(每题 5 分, 满分 20 分.)

13. $(x^2 - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是_____.

14. 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DE}$, 且 F 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF}=$ _____.

15. 经过点 $P(1, 1)$ 以及圆 $x^2+y^2-4=0$ 与 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 交点的圆的方程为_____.

16. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}-ax$, 若 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 且 $0<x_2-x_1<\ln 2$, 则 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 每题 12 分, 共 60 分.

高三理科数学试题卷 第 3 页 (共 6 页)

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

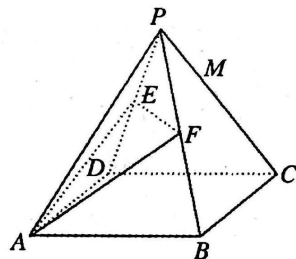
(II) 若 $b_n = a_n \cdot \cos n\pi$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 $2n$ 项和 T_{2n} .

18. (12 分)

如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高均为 2, E, F 分别为 PD, PB 的中点.

(I) 若点 M 是线段 PC 上的点, 且 $PM = \frac{1}{3}PC$, 判断点 M 是否在平面 AEF 内, 并证明你的结论;

(II) 求直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值.



19. (12 分)

世界杯足球赛淘汰赛阶段的比赛规则为: 90 分钟内进球多的球队取胜, 如果参赛双方在 90 分钟内无法决出胜负 (踢成平局), 将进行 30 分钟的加时赛, 若加时赛阶段两队仍未分出胜负, 则进入“点球大战”. 点球大战的规则如下: ① 两队各派 5 名队员, 双方轮流踢点球, 累计进球个数多者胜; ② 如果在踢满 5 球前, 一队进球数已多于另一队踢 5 球可能踢中的球数, 则该队胜出, 譬如: 第 4 轮结束时, 双方进球数比 2:0, 则不需踢第 5 轮了; ③ 若前 5 轮点球大战中双方进球数持平, 则采用“突然死亡法”决出胜负, 即从第 6 轮起, 双方每轮各派 1 人踢点球, 若均进球或均不进球, 则继续下一轮. 直到出现一方进球另一方不进球的情况, 进球方胜.

高三理科数学试题卷 第 4 页 (共 6 页)

现有甲乙两队在淘汰赛中相遇,双方势均力敌,120分钟(含加时赛)仍未分出胜负,须采用“点球大战”决定胜负.设甲队每名球员射进的概率为 $\frac{1}{2}$,乙队每名球员射进的概率为 $\frac{2}{3}$.每轮点球结果互不影响.

(I) 设甲队踢了5球, X 为射进点球的个数,求 X 的分布列与期望;

(II) 若每轮点球都由甲队先踢,求在第四轮点球结束时,乙队进了4个球并刚好胜出的概率.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,且过点 $P(2, 1)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设不过点 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, A 关于原点的对称点为 D ,记直线 l, PB, PD 的斜率分别为 k, k_1, k_2 ,若 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{2}$,证明直线 l 的斜率 k 为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x, x \in [-\pi, \pi]$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间与最值;

(II) 若存在 $x_0 \in [0, \pi]$,使得不等式 $f(x_0) \geq a(x_0^2 + 1)$ 成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22,23题中任选一题作答.在答题卷上将所选题号涂黑,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos \alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha}, \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数, } \alpha \neq k\pi$$

$+\frac{\pi}{2})$,以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极

坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$.

(I)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II)已知点 $P(2,0)$,若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点,求 $|\frac{1}{|PA|} - \frac{1}{|PB|}|$ 的值.

23.(10分)

已知 $f(x) = |2x+2| + |x-3|$.

(I)求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(II)若 $f(x)$ 的最小值为 m ,正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=m$,求证 $\frac{1}{a+b} +$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2m}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线