

开封市 2023 届高三年级第二次模拟考试

理科数学

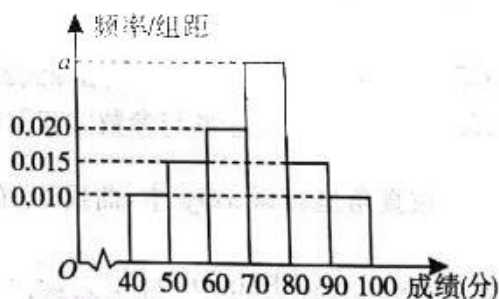
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效. 来源:高三答案公众号
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \mid |x-1| > 2\}$, $B = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$
 A. $\{1\}$ B. $\{-1, 1, 3\}$ C. $\{-3, -1, 1, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
2. 已知向量 $a = (-1, 1)$, $b = (1, m)$, 若 $a \parallel (ma + b)$, 则 $m =$
 A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. $-\frac{1}{3}$ D. -1
3. 已知 $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2x =$
 A. $-\frac{18}{25}$ B. $\frac{18}{25}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

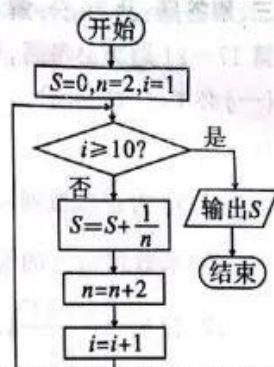
4. 在某次高中学科知识竞赛中,对 2000 名考生的参赛成绩进行统计,可得到如图所示的频率分布直方图,其中分组的区间为 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 60 分以下视为不及格,则下列说法中正确的个数有



- ① a 的值为 0.300
 - ② 不及格的考生数为 500
 - ③ 考生竞赛成绩的平均分约为 70.5 分(同一组中数据用该组区间中点值近似代替)
 - ④ 考生竞赛成绩的中位数约为 75 分
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
5. $(\frac{1}{x} - 2x)^6$ 展开式中的常数项是
 A. -160 B. -20 C. 20 D. 160
 6. a, b 为实数,则“ $a > b > 1$ ”是“ $|\ln a| > |\ln b|$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 如图所示的程序框图, 所解决的问题是

- A. 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}$ 的值
 B. 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{18}$ 的值
 C. 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}$ 的值
 D. 计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{22}$ 的值



8. 已知棱长为 6 的正四面体内有一个正方体玩具, 若正方体玩具可以在该正四面体内任意转动, 则这个正方体玩具的棱长最大值为

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

9. 把函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再把所得图

象向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位, 若最终所得图象对应的函数在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 则 φ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

10. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $\sqrt{3}$, P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $|\overrightarrow{PA}| = 1$, 则 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的取值范围是

- A. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right]$ C. $[1, 4]$ D. $[1, 7]$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 重合, 且

与该抛物线在第一象限交于点 M , 若 $|FM| = \frac{5}{6}p$, 则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = e^x + x, g(x) = 3x$, 且 $f(m) = g(n)$, 则 $n - m$ 的最小值为

- A. $1 - \ln 2$ B. $2(1 - \ln 2)$ C. $\frac{1}{3}(2 - \ln 2)$ D. $\frac{2}{3}(1 - \ln 2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知复数 z 满足 $|z + 2i| = |z|$, 写出一个满足条件的复数 $z =$ _____.

14. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = a_4 - a_4$,

则 $\frac{a_5}{b_5} =$ _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 7, \tan A = -2 \tan B$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

16. 已知矩形 $ABCD, CD = 4AD = 4\sqrt{3}$, 过 CD 作平面 α , 使得平面 $ABCD \perp \alpha$, 点 P 在 α 内, 且 AP 与 CD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则点 P 的轨迹为 _____, BP 长度的最小值为 _____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

记 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, S_n + S_{n-1} = \frac{1}{a_n} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{(-1)^n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

某沙漠地区经过治理, 生态系统得到很大改善, 野生动物数量有所增加. 某研究小组为调查该地区某种野生动物的数量, 将其分成面积相近的 200 个地块, 从这些地块中用简单随机抽样的方法抽取 20 个作为样区, 调查得到样本数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$, 其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个样区的植物覆盖面积 (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量, 计算得 $\sum_{i=1}^{20} x_i = 60$, $\sum_{i=1}^{20} y_i = 1200$, $\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 4400$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 260$. 作散点图发现, 除了明显偏离比较大的两个样本点 $(4, 28), (2, 8)$ 外, 其它样本点大致分布在一条直线附近, 为了减少误差, 该研究小组剔除了这两个样本点, 重新抽样补充了两个偏离比较小的样本点 $(3, 66), (3, 70)$.

(1) 求该地区这种野生动物数量的估计值 (这种野生动物数量的估计值等于样区这种野生动物数量的平均数乘以地块数);

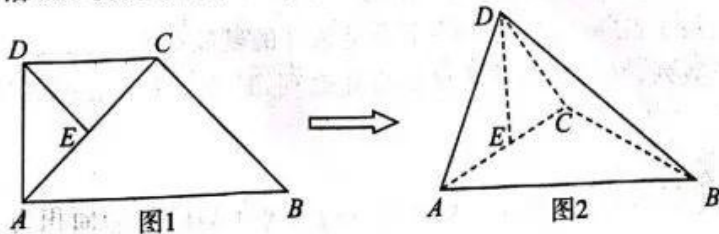
(2) 建立地块的植物覆盖面积 x (单位: 公顷) 和这种野生动物的数量 y 的线性回归方程;

(3) 经过进一步治理, 如果每个地块的植物覆盖面积增加 1 公顷, 预测该地区这种野生动物增加的数量.

参考公式: 线性回归方程 $y = \hat{b}x + a$, 其中 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $a = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

19. (12 分)

如图 1, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AD = CD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{2}$, E 为 AC 的中点, 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起 (如图 2). 在图 2 所示的几何体 $D-ABC$ 中:



(1) 若 $AD \perp BC$, 求证: $DE \perp$ 平面 ABC ;

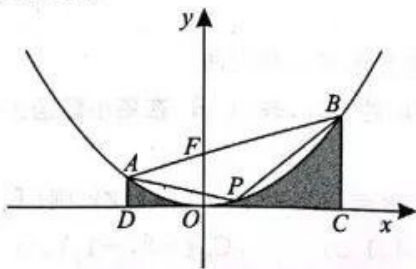
(2) 若 BD 与平面 ACD 所成的角为 60° , 求二面角 $D-AC-B$ 的余弦值.

20. (12分)

如图,过抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 F 作直线 l 交 E 于 A, B 两点,点 A, B 在 x 轴上的射影分别为 D, C . 当 AB 平行于 x 轴时,四边形 $ABCD$ 的面积为 4.

(1)求 p 的值;

(2)过抛物线上两点的弦和抛物线弧围成一个抛物线弓形,古希腊著名数学家阿基米德建立了这样的理论:以抛物线弓形的弦为底,以抛物线上平行于弦的切线的切点为顶点作抛物线弓形的内接三角形,则抛物线弓形的面积等于该内接三角形面积的 $\frac{4}{3}$ 倍. 已知点 P 在抛物线 E 上,且 E 在点 P 处的切线平行于 AB ,根据上述理论,从四边形 $ABCD$ 中任取一点,求该点位于图中阴影部分的概率的取值范围.



21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + x$ 图象上三个不同的点 $M(m, f(m)), N(n, f(n)), P(1, f(1))$.

(1)求函数 $f(x)$ 在点 P 处的切线方程;

(2)记(1)中的切线为 l ,若 $MN \parallel l$,证明: $2 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < e$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数),曲线 C_2 的参数方程

为 $\begin{cases} x = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta), \\ y = \cos\theta - \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).

(1)将曲线 C_2 的参数方程化为普通方程;

(2)已知点 $M(1,0)$,曲线 C_1 和 C_2 相交于 A, B 两点,求 $\left| \frac{1}{|MA|} - \frac{1}{|MB|} \right|$.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10分)

已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 且 $a + b + c = 1$, 证明:

(1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 9abc$;

(2) $\frac{(b+1)^2}{a} + \frac{(c+1)^2}{b} + \frac{(a+1)^2}{c} \geq 16$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线