

成都市 2018 级高中毕业班第三次诊断性检测

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x < 4\}$, 则 $(\complement_U A) \cup B =$
(A) $\{x \mid x < 3\}$ (B) $\{x \mid x \leq 3\}$ (C) $\{x \mid x < 4\}$ (D) $\{x \mid x \leq 4\}$
2. 已知复数 $z = \frac{1-3i}{1-i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$
3. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a = 3b$, $\sin A = \frac{3}{5}$, 则 $\sin B$ 的值为
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{9}$

4. 某市环境保护局公布了该市 A, B 两个景区 2014 年至 2020 年各年的全年空气质量优良天数的数据. 现根据这组数据绘制了如图所示的折线图, 则由该折线图得出的下列结论中正确的是



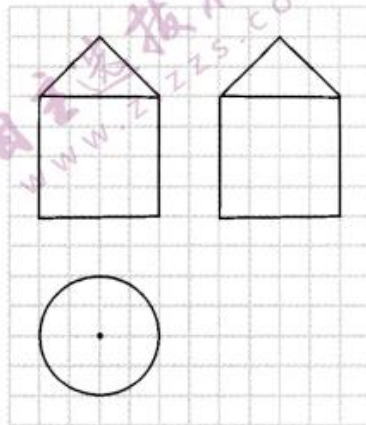
- (A) 景区 A 这七年的空气质量优良天数的极差为 98
- (B) 景区 B 这七年的空气质量优良天数的中位数为 283
- (C) 分别记景区 A, B 这七年的空气质量优良天数的众数为 m_1, m_2 , 则 $m_1 > m_2$
- (D) 分别记景区 A, B 这七年的空气质量优良天数的标准差为 s_1, s_2 , 则 $s_1 > s_2$

5. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ x + 2y - 2 \leq 0. \end{cases}$ 则 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 5

6. 某几何体的三视图如图所示, 已知网格纸上的小正方形边长为 1, 则该几何体的表面积为

(A) $(20 + 8\sqrt{2})\pi$ (B) $(20 + 4\sqrt{2})\pi$
(C) $(24 + 8\sqrt{2})\pi$ (D) $(24 + 4\sqrt{2})\pi$



7. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbf{R}$) 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线 l 的斜率为 2, 则直线 l 在 y 轴上的截距为

(A) 3 (B) -3
(C) 1 (D) -1

8. 设向量 $\mathbf{a} = (x, x-1)$, $\mathbf{b} = (2, -1)$. 若 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 与 \mathbf{b} 共线, 则实数 x 的值为

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{5}{3}$ (C) 10 (D) -11

9. 命题 p : 函数 $f(x) = a^{-x+1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 $(0, 1)$; 命题 q : 当 $t \in (-2, 2)$ 时, 函数 $g(x) = x^2 - 3tx + 1$ 在区间 $(-3, 3)$ 上存在最小值. 则下列命题为真命题的是

(A) $p \wedge q$ (B) $p \vee (\neg q)$ (C) $(\neg p) \vee q$ (D) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F_2 , 点 M, N 在双曲线的同一条渐近线上, O 为坐标原点. 若直线 F_2M 平行于双曲线的另一条渐近线, 且 $OF_2 \perp F_2N$, $|F_2M| = \frac{\sqrt{5}}{2} |F_2N|$, 则该双曲线的渐近线方程为

(A) $y = \pm \frac{1}{4}x$ (B) $y = \pm \frac{1}{2}x$ (C) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y = \pm 2x$

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = AC = 2$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$. 若三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的半径为

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}$

12. 已知 A, B 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的两个动点, 且满足 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 点 $P(\sqrt{3}, \sqrt{6})$, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的最小值为

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $7 - 2\sqrt{6}$

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡上.

13. 计算 $8^{-\frac{1}{3}} + \frac{\lg 6}{\lg 2} - \log_2 3$ 的值为_____.

14. 已知 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{3}{4}$, 则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____.

15. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点,过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线相交于 A, B 两点.若 $|AF| - |BF| = \sqrt{6}$, 则线段 AB 的长为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, \varphi \in \mathbf{R})$ 在区间 $(\frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调,且满足 $f(\frac{7\pi}{12}) = -f(\frac{3\pi}{4})$.

有下列结论:

① $f(\frac{2\pi}{3}) = 0$;

② 若 $f(\frac{5\pi}{12}) = 1$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ;

③ ω 的取值范围为 $(0, 4]$;

④ 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 上最多有 6 个零点.

其中所有正确结论的编号为_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

《营造法式》是中国北宋时期官方颁布的一部建筑设计与施工的书籍,标志着我国古代建筑技术和工艺发展到了较高水平.中国近代建筑之父梁思成用现代语言和制图方法对该书进行了注释,著有《〈营造法式〉注释》.为了让建筑类学生了解古建筑设计与构造的原理,某建筑大学为大三和四大的学生开设了一门选修课程《营造法式及其注释》.为检测学生学习效果,要求所有选修该门课程的学生完成“应用营造法式独立制作一件古建筑模型”的作业.已知选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 3:2,现用分层抽样的方法从所有作业中随机抽取 100 份(每位学生均上交一份作业),并评出成绩,得到如下频数分布表.

| 成绩(单位:分) | [50,60) | [60,70) | [70,80) | [80,90) | [90,100] |
|----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 频数(不分年级) | 4 | x | 20 | 38 | 30 |
| 频数(大三年级) | 3 | 6 | 15 | y | 12 |

(I) 求 x, y 的值;若以频率作为概率,从选修该门课程的大四学生中随机选取 1 名,试估计该学生的作业成绩在 $[60, 80)$ 的概率;

(II) 估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表).

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且满足 $a_{n+2} + 3a_n = 4a_{n+1}$. 设 $b_n = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbf{N}^*$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

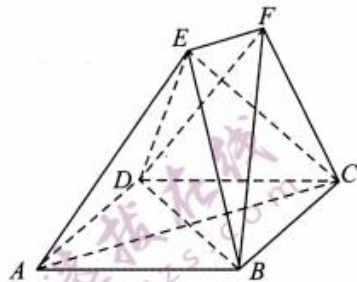
(II) 记 $c_n = \log_3(a_n + b_n)$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_{20} .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $EB = ED$, $EF \parallel AC$.

(I) 求证: 平面 $BDF \perp$ 平面 $ACFE$;

(II) 若 $EB = 2$, $EA = EC$, $EF = \frac{1}{4}AC$, 求多面体 $ABCDEF$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$, 右焦点 F_2 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过点 $M(-3, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 过点 F_2 作直线 l 的垂线, 垂足为 N (点 A, B 在点 M, N 之间). 若 $|MA| = |BN|$, 求直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos x - ax^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(I) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一的极值点, 求 a 的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = k^2, \\ y = \sqrt{2}k \end{cases}$ (k 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$.

(I) 求曲线 C 与直线 l 的普通方程;

(II) 设直线 l 与曲线 C 相交于 P, Q 两点, 点 $M(\sqrt{2}, 0)$, 求 $|PM|^2 + |QM|^2$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x^2 - 4| + |x + 2| - 4$.

(I) 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有唯一实数解, 求实数 m 的值;

(II) 对 (I) 中的 m 值, 若正实数 a, b 满足 $a + b + 2m = 0$, 试比较 $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小, 并说明理由.

成都市 2018 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. D; 3. A; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. A; 9. C; 10. B; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{3}{2}$; 14. $-\frac{1}{8}$; 15. $2\sqrt{3}$; 16. ①②④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意,知 $4+x+20+38+30=100$. $\therefore x=8$2 分

在这 100 份作业中,因大三学生的作业共 $3+6+15+y+12=36+y$ (份),
则大四学生的作业共 $64-y$ (份).

\therefore 选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 $3:2$,

$\therefore \frac{36+y}{64-y} = \frac{3}{2}$. 解得 $y=24$4 分

故大四学生作业共 40 份. 其中,成绩在 $[60,70)$, $[70,80)$ 的作业份数分别为 2, 5.

故成绩在 $[60,80)$ 的作业共 7 份.5 分

\therefore 从选修该门课程的大四学生中随机选取 1 名,估计其作业成绩在 $[60,80)$ 的概率为 $\frac{7}{40}$7 分

(II)由(I)可知,这 100 份作业中大三学生作业共 60 份.8 分

设大三学生作业的平均成绩为 \bar{x} .

则 $\bar{x} = \frac{3}{60} \times 55 + \frac{6}{60} \times 65 + \frac{15}{60} \times 75 + \frac{24}{60} \times 85 + \frac{12}{60} \times 95 = 81$.

\therefore 估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩为 81 分.12 分

18. 解:(I) $\because a_{n+2} + 3a_n = 4a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$1 分

$\therefore b_n = a_{n+1} - a_n, \therefore b_{n+1} = 3b_n$2 分

又 $b_1 = a_2 - a_1 = 2$,

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列.4 分

$\therefore b_n = 2 \times 3^{n-1}$6 分

(II) $\because b_n = a_{n+1} - a_n$,

$\therefore a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$ 7 分

$= b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + a_1 = \frac{2(1-3^n)}{1-3} + 1 = 3^n$9 分

$\therefore c_n = \log_3(a_n + b_n) = \log_3 3^n = n$ 10分

$\therefore S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 11分

$\therefore S_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ 12分

19. 解:(I) 如图, 设 AC 与 BD 的交点为 O, 连接 EO.

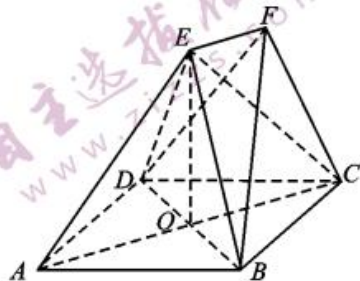
\because 四边形 ABCD 是菱形, $\therefore AC \perp BD$, 且 O 为 BD, AC 的中点.1分

$\because EB = ED$, $\therefore BD \perp EO$2分

$\because AC, EO \subset$ 平面 ACFE, $AC \cap EO = O$, $\therefore BD \perp$ 平面 ACFE.4分

又 $BD \subset$ 平面 BDF,

\therefore 平面 BDF \perp 平面 ACFE.5分



(II) \because 四边形 ABCD 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 则 $BD = 2$.

$\therefore OB = OD = 1$6分

在 $Rt\triangle EOB$ 中, $\because BO = 1, EB = 2$, 则 $EO = \sqrt{3}$7分

又 $AC = 2AO = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}$, $EF = \frac{1}{4}AC$, $\therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$8分

$\because EF \parallel AC$, \therefore 四边形 ACFE 是梯形.

$\because O$ 为 AC 的中点, $EA = EC$, $\therefore EO \perp AC$9分

\therefore 梯形 ACFE 的面积 $S = \frac{1}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = \frac{15}{4}$10分

又由(I)知 $BD \perp$ 平面 ACFE.

$\therefore V_{ABCDEF} = V_{B-ACFE} + V_{D-ACFE} = 2V_{B-ACFE}$

$= 2 \times \frac{1}{3} S \cdot OB = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{15}{4} \times 1 = \frac{5}{2}$.

\therefore 多面体 ABCDEF 的体积为 $\frac{5}{2}$12分

20. 解:(I) \because 椭圆 C 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$,

$\therefore \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2\sqrt{5}$, 即 $ab = \sqrt{5}$1分

\because 点 $F_2(c, 0) (c > 0)$ 到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离为 $\frac{|c+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore c = 2$2分

又 $a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a^2 = \frac{5}{a^2} + 4$, 即 $a^4 - 4a^2 - 5 = 0$.

解得 $a^2 = 5$ 或 $a^2 = -1$ (舍去).3分

$\therefore b^2 = 1$.

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$4分

(II)由题意,直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $x = my - 3$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3 \\ \frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 5)y^2 - 6my + 4 = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta = 20(m^2 - 4) > 0, \text{ 得 } m < -2 \text{ 或 } m > 2. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), N(x_N, y_N)$.

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{m^2 + 5}, y_1 y_2 = \frac{4}{m^2 + 5}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

设过点 F_2 与直线 l 垂直的直线的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 3, \\ x = -\frac{1}{m}y + 2 \end{cases}, \text{ 解得 } y_N = \frac{5m}{m^2 + 1}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because |MA| = |BN|, \therefore MA, BN \text{ 在 } y \text{ 轴上的投影相等, 即 } |y_1 - 0| = |y_N - y_2|. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \text{点 } A, B \text{ 在点 } M, N \text{ 之间}, \therefore y_1 + y_2 = y_N, \text{ 即 } \frac{6m}{m^2 + 5} = \frac{5m}{m^2 + 1}.$$

$$\text{解得 } m = \pm\sqrt{19}, \text{ 满足 } m < -2 \text{ 或 } m > 2. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } x + \sqrt{19}y + 3 = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{19}y + 3 = 0. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解:(I)当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(x) = -\sin x + x$1分

设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -\cos x + 1, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 显然 $g'(x) \geq 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增. 则当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $g(x) \geq g(0) = 0$2分

\therefore 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x) \geq 0$. \therefore 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.4分

又 $f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8}$, \therefore 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, \frac{\pi^2}{8}]$5分

(II)因 $f'(x) = -\sin x - 2ax$, 设 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = -\cos x - 2a$6分

①当 $a \geq 0$ 时, $h'(x) \leq 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减. $\therefore h(x) \leq h(0) = 0$,

则 $f'(x) \leq 0$. 此时 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 无极值.7分

②当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

$\therefore h(x) \geq h(0) = 0$, 则 $f'(x) \geq 0$. 此时 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 无极值.

.....8分

③当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $h'(x_0) = -\cos x_0 - 2a = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) > 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……9分

$\because h(0) = 0, \therefore h(x_0) < 0$. 又 $h(\frac{\pi}{2}) = -1 - a\pi$,

(I) 当 $-1 - a\pi \leq 0$, 即 $-\frac{1}{\pi} \leq a < 0$ 时, $h(\frac{\pi}{2}) \leq 0$.

$\therefore f'(x) \leq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 无极值. ……10分

(II) 当 $-1 - a\pi > 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{\pi}$ 时, $h(\frac{\pi}{2}) > 0$.

则存在 $x_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使 $h(x_1) = -\sin x_1 - 2ax_1 = 0$.

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. ……11分

$\therefore x_1$ 是函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的极小值点, 且为唯一的极值点.

综上, 当函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一极值点时, a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi})$.

……12分

22. 解: (I) 消去曲线 C 的参数方程中的参数 k , 得 $y^2 = 2x$.

……2分

\therefore 曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 2x$.

……3分

整理 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$, 可得 $\rho \cos\theta + \rho \sin\theta = \sqrt{2}$.

……4分

$\because \rho \cos\theta = x, \rho \sin\theta = y, \therefore$ 直线 l 的普通方程为 $x + y - \sqrt{2} = 0$. ……5分

(II) 将直线 l 的普通方程化为参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). ……6分

代入 $y^2 = 2x$, 整理可得 $t^2 + 2\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} = 0$. ……(*)

而 $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-4\sqrt{2}) = 8 + 16\sqrt{2} > 0$. ……7分

设 t_1, t_2 是方程 (*) 的两个实数根.

则 $t_1 + t_2 = -2\sqrt{2}, t_1 t_2 = -4\sqrt{2}$. ……8分

$\therefore |PM|^2 + |QM|^2 = t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 8 + 8\sqrt{2}$. ……10分

23. 解: (I) ① 当 $x \leq -2$ 时, $f(x) = x^2 - x - 10$. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减, 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4, +\infty)$; ……1分

② 当 $-2 < x < 2$ 时, $f(x) = -x^2 + x + 2$. 函数 $f(x)$ 在 $(-2, \frac{1}{2})$ 上单调递增,

在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递减, 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-4, \frac{9}{4}]$;2分

③当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2 + x - 6$. 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增. 此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$;3分

由题意, 及函数 $f(x)$ 的图象知 $m = -4$5分

(II) $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为: $\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$.

证明如下: 由 $a+b+2m=0$ 及 $m=-4$, 知 $a+b=8$6分

$\because a > 0, b > 0,$

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} = \frac{1}{16} [(a+3) + (b+5)] (\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5})$ 8分

$= \frac{1}{16} (2 + \frac{b+5}{a+3} + \frac{a+3}{b+5}) \geq \frac{1}{16} (2 + 2\sqrt{\frac{b+5}{a+3} \cdot \frac{a+3}{b+5}}) = \frac{1}{4}$.

当且仅当 $\frac{b+5}{a+3} = \frac{a+3}{b+5}$, 即 $a=5, b=3$ 时等号成立.9分

$\therefore \frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+5} \geq \frac{1}{4}$10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》