高三数学试卷参考答案(文科)

1. D　因为 $z=\sqrt{2}i$,所以 $z^2=-2$,$z^4=4$.

2. A　因为 $A=(0,16)$,$B=(-1,4)$,所以 $A\cup B=(-1,16)$.

3. B　因为 $f(-x)=\frac{(-x)^2}{2^{-x}-2^x}=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,排除 AC. 当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,排除 D,故选 B.

4. C　由 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 得 $x^3=4x$,即 $x=\pm2$ 或 $x=0$,因为 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量,所以 $x=\pm2$,即 $|x|=2$,故"$|x|=2$"是"$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$"的充要条件.

5. B　由题意可知该曲面棱柱的底面积 $S=\frac{9(\pi-\sqrt{3})}{2}$. 设 $AB=x$,则 $3\times(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{9(\pi-\sqrt{3})}{2}$,解得 $x=3$.

6. D　因为 $1<a=1.3^{0.1}<2$,$b=\log_2 5>2$,$c=0.9^{2.3}<1$,所以 $c<a<b$.

7. D　由题意可得 $a_5=2a_4+2=2(2a_3-1)+2=4(2a_2+2)=8(2a_1-1)+8=16a_1=16$,$a_8=2a_7-1=2(2a_6+2)-1=4(2a_5-1)+3=127$,则 $a_5+a_8=16+127=143$.

8. B　甲、乙同学所选的科目情况有(化学,化学),(化学,生物),(生物,化学),(生物,生物),(政治,化学),(政治,生物),共 6 种,其中甲、乙同学所选的科目相同的情况有(化学,化学),(生物,生物),共 2 种,故所求概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

9. D　因为$\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$,所以圆心 M 到渐近线的距离等于半径的一半,则$\frac{ab}{c}=\frac{c}{2}$,则 $a^2(c^2-a^2)=\frac{c^4}{4}$,即$(\frac{c}{a})^4-4(\frac{c}{a})^2+4=0$,解得$(\frac{c}{a})^2=2$,则双曲线 C 的离心率为$\sqrt{2}$.

10. D　当 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{a}{6}]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{a}{3}+\frac{\pi}{6}]$,则$-\frac{\pi}{3}<\frac{a}{3}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得$-\frac{3\pi}{2}<a\leqslant\pi$;当 $x\in[\frac{2a}{5},\frac{7\pi}{12}]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{4a}{5}+\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$,则$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{4a}{5}+\frac{\pi}{6}<\frac{4\pi}{3}$,解得$\frac{5\pi}{12}\leqslant a<\frac{35\pi}{24}$. 综上,$a$ 的取值范围是$[\frac{5\pi}{12},\pi]$.

11. A　由题意可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x$. 令 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x=-1$,解得 $x=1$($x=-\frac{1}{2}$舍去). 因为 $f(1)=-1$,所以点$(1,-1)$到直线 $x+y-4=0$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,则 A,B 之间的最短距离是 $2\sqrt{2}$.

12. A　设$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r,则 $r=\frac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=4$. 设球 O 的半径为 R,因为三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值是 $32\sqrt{3}$,所以$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times(\sqrt{R^2-4^2}+R)=32\sqrt{3}$,解得 $R=5$,故

球 O 的表面积是 $4\pi R^2=100\pi$.

13.120　由题意可知 $P(X>120)=P(X<60)=0.1$,则数学成绩为优秀的人数是 $1200\times0.1=120$.

14.7　画出可行域(图略),则直线 $z=2x-y$ 经过点 $(4,1)$ 时,z 取得最大值,且最大值是 7.

15.$\frac{1}{n}$　因为 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$,

所以 $[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$,所以 $(n+1)a_{n+1}-na_n=0$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,则 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$,故 $a_n=\frac{1}{n}$.

16.2　由题意可知 $F(\frac{p}{2},0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\cdot|DE|p=\frac{p}{2}|DE|$,

$S_{\text{四边形}ABED}=\frac{|AD|+|BE|}{2}\cdot|DE|=\frac{x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}}{2}\cdot|DE|=\frac{x_1+x_2+p}{2}\cdot|DE|$,

因为 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\text{四边形}ABED}$,所以 $x_1+x_2=3p$.由题意可知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$,联立 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 整理得 $y^2-2mpy-p^2=0$,则 $y_1+y_2=2mp$,$y_1y_2=-p^2$,从而 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+p=(2m^2+1)p=3p$,解得 $m^2=1$,故 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{2}p$,即 $|DE|=2\sqrt{2}p$.因为 $S_{\triangle DEF}=4\sqrt{2}$,所以 $\sqrt{2}p^2=4\sqrt{2}$,解得 $p=2$.

17.解:(1)由题意得 $x=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$,$y=\frac{3+4+6+5+7}{5}=5$. ………………………… 2 分

因为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=145$,$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5=138$, …………… 4 分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)(y_i-y)=\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5x\,y=138-5\times5\times5=13$,

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5x^2}=\sqrt{145-5\times5^2}=2\sqrt{5}$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-y)^2}=\sqrt{10}$,

故 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)(y_i-y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)^2\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-y)^2}}=\frac{13}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{2}}{20}\approx0.92$. ……………… 6 分

(2)$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)(y_i-y)}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-x)^2}=\frac{13}{20}=0.65$,$\hat{a}=y-\hat{b}x=5-0.65\times5=1.75$, … 8 分

故线性回归直线方程为 $\hat{y}=0.65x+1.75$. …………………………………………… 9 分

(3)当 $x=10$ 时,$\hat{y}=0.65\times10+1.75=8.25$ 百万元. ……………………………… 12 分

18.(1)证明:由四边形 $ABCD$ 为矩形,得 $AD\perp CD$. ………………………… 1分

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp CD$. ………………… 3分

因为 $PA\cap AD=A$,所以 $CD\perp$平面 PAD. ………………………… 4分

因为 $CD\subset$平面 PCD,所以平面 $PAD\perp$平面 PCD. ………………………… 5分

(2)解:因为 $AD=3AE$,$AD=3$,所以 $AE=1$. ………………………… 6分

因为四边形 $ABCE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=2$, ………………………… 8分

所以 $V_{P-ABCE}=\frac{1}{3}\times PA\times S=\frac{1}{3}\times3\times2=2$. ………………………… 12分

19.解:(1)因为$\sqrt{2}c\sin(A+\frac{\pi}{4})=b$,所以$\sqrt{2}\sin C(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4})=\sin B$,

即 $\sin C\sin A+\sin C\cos A=\sin B$. ………………………… 2分

因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$, ………… 3分

所以 $\sin C=\cos C$,即 $\tan C=1$. ………………………… 4分

因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 5分

(2)因为 D 为 AB 边的中点,所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, ………………………… 6分

所以$\overrightarrow{CD}^2=\frac{\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2}{4}=\frac{b^2+a^2+2ab\cos C}{4}=\frac{b^2+4b+8}{4}=\frac{(b+2)^2+4}{4}$. … 8分

在$\triangle ABC$中,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $b=\frac{2\sqrt{2}\sin B}{\sin(B+\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{1+\frac{1}{\tan B}}$. ………… 9分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形,且 $C=\frac{\pi}{4}$,所以 $B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, ………………………… 10分

则 $\tan B\in(1,+\infty)$,故 $b\in(2,4)$. ………………………… 11分

因为 $b\in(2,4)$,所以$|\overrightarrow{CD}|\in(\sqrt{5},\sqrt{10})$,即线段 CD 长的取值范围为$(\sqrt{5},\sqrt{10})$. … 12分

20.解:(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$,

由题意可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{4}{a^2}=1,\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得 $a=2,b=1$. ………………………… 3分

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 5分

(2)由题意可知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l:$x=my+6$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}x=my+6,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$整理得$(m^2+4)y^2+12my+32=0$,

则 $\Delta=144m^2-4(m^2+4)\times32=16(m^2-32)>0$,

$y_1+y_2=-\dfrac{12m}{m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{32}{m^2+4}$. ………………………………………………… 7分

因为 $P(2,0)$,所以 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1-2}, k_2=\dfrac{y_2}{x_2-2}$, ………………………………………… 8分

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1}{x_1-2}\times\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$ ……… 9分

$=\dfrac{\frac{32}{m^2+4}}{m^2\cdot\frac{32}{m^2+4}+4m\cdot(-\frac{12m}{m^2+4})+16}=\dfrac{32}{32m^2-48m^2+16m^2+64}=\dfrac{1}{2}$. ……………… 11分

故 k_1k_2 为定值,该定值为$\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 12分

21.(1)解:因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)$,所以 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,

且 $f'(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$. …………………………………………………………… 1分

因为 $x>-1$,所以 $f'(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增. …………………… 2分

因为 $f(0)=0$,所以当$-1<x<0$ 时,$f(x)<0$;当 $x=0$ 时,$f(0)=0$;

当 $x>0$ 时,$f(x)>0$. …………………………………………………………………………… 4分

(2)证明:由(1)可知当 $x\in[0,1)$时,$\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\geqslant 0$,即 $\ln(x+1)\geqslant x-\dfrac{x^2}{2}$. …… 5分

同理当 $x\in(-1,0]$时,$\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}$,即当 $x\in[0,1)$时,$\ln(1-x)\leqslant -x-\dfrac{x^2}{2}$, … 6分

则 $\ln(x+1)-\ln(1-x)\geqslant 2x$,故 $x[\ln(x+1)-\ln(1-x)]+4\cos x-4\geqslant 2x^2+4\cos x-4$.

…………………………………………………………………………………………………… 7分

设 $g(x)=2x^2+4\cos x-4$,则 $g'(x)=4x-4\sin x$. ……………………………………………… 8分

设 $h(x)=4x-4\sin x$,则 $h'(x)=4-4\cos x\geqslant 0$,从而 $h(x)$在$[0,1)$上单调递增. …… 9分

因为 $h(0)=0$,所以 $h(x)\geqslant 0$,即 $g'(x)\geqslant 0$,所以 $g(x)$在$[0,1)$上单调递增, ………… 10分

则 $g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $2x^2+4\cos x-4\geqslant 0$. ………………………………………………… 11分

故对任意的 $x\in[0,1)$,$x[\ln(x+1)-\ln(1-x)]+4\cos x-4\geqslant 0$ 恒成立. …………… 12分

22.解:(1)由 $y=\sqrt{-x^2+4x}$,得 $y^2=-x^2+4x(y\geqslant 0)$, ………………………………… 1分

则 $x^2+y^2=4x(y\geqslant 0)$,则 $\rho^2=4\rho\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, ……………………………… 2分

所以曲线 M 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$. ……………………………… 3分

由 $xy=9$,得 $\rho^2\cos\theta\sin\theta=9$,即 $\rho^2\sin 2\theta=18$,

此即曲线 N 的极坐标方程. ………………………………………………………………… 5分

(2)将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho^2\sin 2\theta=18$,得$|OB|=\rho=\sqrt{\dfrac{18}{\sin 2\theta_0}}$. …………………………… 6分

将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho=4\cos\theta$,得$|OA|=\rho=4\cos\theta_0$, ……………………………………… 7分

则 $|OA|\cdot|OB|=\dfrac{12}{\sqrt{\tan\theta_0}}$. ………………………………………………………… 8 分

因为 $|OA|\cdot|OB|=12$,所以 $\tan\theta_0=1$,又 $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$. …………………… 10 分

【注】曲线 N 的极坐标方程写为 $\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta=9$ 也可以,不扣分.

23.(1)证明:因为 $f(x)=|x-a-1|+|x-2a|\geqslant|x-a-1-(x-2a)|=|a-1|$, ……… 2 分

所以 $f(x)_{\min}=|a-1|$. ………………………………………………………… 3 分

由 $|a-1|\geqslant 1$,得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 2$, ………………………………………………… 4 分

则当 $a\geqslant 2$ 时,$f(x)\geqslant 1$ 恒成立,所以存在 $a\in(0,+\infty)$,使得 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立. ……… 5 分

(2)解:当 $x\in[2a,4]$时,$f(x)=|x-a-1|+x-2a$.

由 $f(x)\leqslant x+a$,得 $|x-a-1|\leqslant 3a$, ………………………………………… 6 分

则 $-3a\leqslant x-a-1\leqslant 3a$,即 $-2a+1\leqslant x\leqslant 4a+1$. ………………………………… 7 分

因为当 $x\in[2a,4]$时,$f(x)\leqslant x+a$,所以 $\begin{cases}-2a+1\leqslant 2a,\\4a+1\geqslant 4,\end{cases}$ ………………………… 8 分

解得 $a\geqslant\dfrac{3}{4}$, ………………………………………………………………… 9 分

又 $2a<4$,所以 a 的取值范围是 $[\dfrac{3}{4},2)$. ………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。