# 江西省八所重点中学2023届高三联考数学（理）试卷答案

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | B | D | B | C | D |
| 题号 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 答案 | A | C | B | B | A | A |

13.-2　　14. $\left(0,\sqrt{e}\right)$　　15. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　16.0

17 解：（1）∵$a\cos B-2a\cos C=(2c-b)\cos A$，

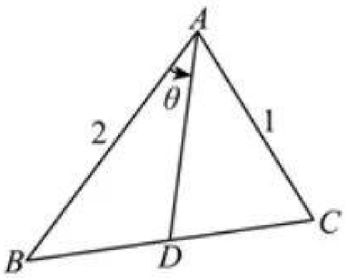
∴在△$ABC$中，由正弦定理得 $\sin A\cos B-2\sin A\cos C=(2\sin C-\sin B)\cos A$，

∴$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$，∴$\sin(A+B)=2\sin(A+C)$，

∴$\sin C=2\sin B$，即 $c=2b$　（3 分）

$$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4b^2+4b^2-b^2}{2\times 2b\cdot 2b}=\frac{7}{8}$$（6 分）

（2）设∠$BAD=\theta$，如图所示：



$\therefore S$[illegible]$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\times 6AD\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times 3AD\cdot\sin\theta$，（9 分）

6　　3

$\therefore AD=4\cos\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore AD\in(0.4)$．（12 分）

18（1）证明：因为 $AB=AD$，$O$ 为 $BD$ 的中点，

所以 $OA\perp BD$，

因为平面 $ABD\perp$ 平面 $BCD$，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$OA\subset$ 平面 $ABD$，

所以 $OA\perp$ 平面 $BCD$，来源：高三答案公众号

因为 $CD\subset$ 平面 $BCD$，所以 $OA\perp CD$，（4 分）

（2）取 $OD$ 的中点 $F$，

因为△$OCD$ 为等边三角形，所以 $CF\perp OD$，

过 $O$ 作 $OM\parallel CF$，与 $BC$ 交于 $M$，则 $OM\perp OD$，

由（1）可知 $OA\perp$ 平面 $BCD$，

因为 $OM$，$OD\subset$ 平面 $BCD$，所以 $OA\perp OM$，$OA\perp OD$，

所以 $OM$，$OD$，$OA$ 两两垂直，所以以 $O$ 为原点，$OM$，$OD$，$OA$ 所在的直线分别为 $x$，$y$，$z$ 轴建立空间直角坐标系，如图所示，

设 OA=a

因为 $OA\perp$ 平面 $BCD$，所以 $\overline{OA}=(0,0,a)$ 是平面 $BCD$ 的一个法向量，

设平面 $BCE$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

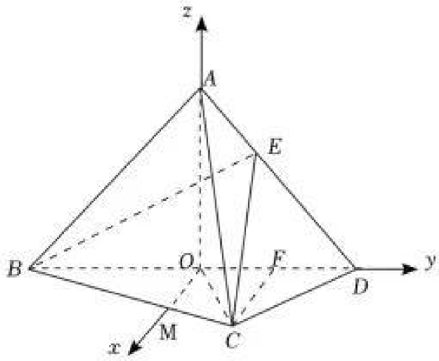
因为 $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$，$\overline{BE}=\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{a}{2}\right)$．

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overline{BE}=\dfrac{3}{2}\cdot y+\dfrac{a}{2}\cdot z=0\end{cases}$，令 Z=3，则 $y=-a$ $x=\sqrt{3}a$

所以 $\vec{n}=\left(\sqrt{3}a,-a,3\right)$，

因为二面角 $E-BC-D$ 的大小为 $45°$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{OA},\ \vec{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OA}||\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，




$a=\dfrac{3}{2}$

$V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}2S_{\Delta OCD}\cdot OA=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

19.解：（1）设椭圆方程 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

由 AC 两点可知：$\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}=1\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\end{cases}$ 解得 $a^2=16, b^2=12$;　　（5 分）

(2)设 $x=my+2$　　$M(x_1,\ y_1)$　$N(x_2,\ y_2)$

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$ $\Longrightarrow$ $(3m^2+4)y^2+12my-36=0$

$\begin{cases}\Delta=576m^2+576>0\\ y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2+4}\\ y_1y_2=\dfrac{-36}{3m^2+4}\end{cases}$　（8 分）

直线 AM: $y=\dfrac{y_1}{x_1+4}(x+4)$

直线 BN: $y=\dfrac{y_2}{x_2-4}(x-4)$

消去 y：$x=\dfrac{4my_1y_2-4y_1+12y_2}{3y_2+y_1}$　　$y=\dfrac{-12m}{3m^2+4}-y_2$

$=\dfrac{4m\frac{-36}{3m^2+4}-4\left(\frac{-12m}{3m^2+4}-y_2\right)+12y_2}{3y_2+\left(\frac{-12m}{3m^2+4}-y_2\right)}$

$=8$

因斜率不为 0，该直线方程：$x=8$（$y\neq0$）　　（12 分）

20 解：（1）①批次 I 的血夜试剂经过前三道工序后的次品率为

$P_1=1-\left[(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)\right]=1-\dfrac{9}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{3}{10}$（3 分）

②设批次 I 的血夜试剂智能自动检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

由已知得 $P(A)=\dfrac{95}{100},P(AB)=1-P_I=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$（5 分）

则工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个血液试剂恰为合格品为事件 $B|A$，

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{100}{95}=\dfrac{14}{19}\approx73.68\%$（8 分）

（2）100 个血液试剂中恰有 1 个不合格的概率 $\varphi(P)=C_{100}^{1}\times P\times(1-P)^{99}$

因此 $\varphi'(P)=100\left[(1-P)^{99}-99p(1-P)^{98}\right]=100(1-P)^{98}(1-100p)$，

令 $\varphi'(P)=0$，得 P=0.01

当 $P\in(0,0.01)$ 时，$\varphi'(P)>0$；当 $P\in(0.01,1)$ 时 $\varphi'(P)<0$.

所以 $\varphi(P)$ 的最大值为 $P_0=0.01$（12 分）

21 （1）当 $a=2$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}+4x-2$，求导得：$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}+4$，$f'(1)=6$，而 $f(1)=3$，则 $y-3=6(x-1)$，

所以 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=6x-3$.（3 分）

（2）

对于在 $(0,1)$ 中的任意一个常数 $b$，假定存在正数 $x_0$，使得 $\mathrm{e}^{g(x_0)}+\frac{b}{2}x_0^2-1<0$ 成立，

显然有 $\mathrm{e}^{g(x_0)}+\frac{b}{2}x_0^2-1<0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x_0+1)-x_0}+\frac{b}{2}x_0^2-1<0\Leftrightarrow (x_0+1)\mathrm{e}^{-x_0}+\frac{b}{2}x_0^2-1<0$，

令 $H(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+\frac{b}{2}x^2-1,x>0$，求导得：$H'(x)=-x\mathrm{e}^{-x}+bx=x(b-\mathrm{e}^{-x})$，

当 $0<x<-\ln b$ 时，$H'(x)<0$，当 $x>-\ln b$ 时，$H'(x)>0$，即 $H(x)$ 在 $(0,-\ln b)$ 上递减，在 $(-\ln b,+\infty)$ 上递增，

则当 $x=-\ln b$ 时，$H(x)_{\min}=H(-\ln b)=(-\ln b+1)\mathrm{e}^{\ln b}+\frac{b}{2}(\ln b)^2-1=\frac{b}{2}(\ln b)^2-b\ln b+b-1$，

令 $G(x)=\frac{x}{2}(\ln x)^2-x\ln x+x-1,0<x<1$，求导得：$G'(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2>0$，即 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

$\forall x\in(0,1),G(x)<G(1)=0$，即 $H(-\ln b)<0$，

所以存在正数 $x_0=-\ln b$，使得 $\mathrm{e}^{g(x_0)}+\frac{b}{2}x_0^2-1<0$.（7 分）

（3）依题意，$h(x)=f(x)-ag(x-1)-4ax+2a=x\mathrm{e}^{x-1}-a(x+\ln x)$，求导得：

$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}-a(1+\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x}(x\mathrm{e}^{x-1}-a)$，

令 $F(x)=x\mathrm{e}^{x-1}-a,x>0$，$F'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}>0$，即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因 $x\mathrm{e}^{x-1}>0$，当 $a\le 0$ 时，$F(x)>0$，即 $h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不存在极值，

当 $a>0$ 时，$F(0)=-a<0$，$F(a+1)=(a+1)\mathrm{e}^{a}-a>0$，从而存在 $x_1>0$，使得 $F(x_1)=0$，即 $h'(x_1)=0$，

当 $0<x<x_1$ 时，$F(x)<0$，$h'(x_1)<0$，当 $x>x_1$ 时，$F(x)>0$，$h'(x_1)>0$，因此，$x_1$ 是函数 $h(x)$ 的极小值点，满足 $a=x_1\mathrm{e}^{x_1-1}$，

$h(x_1)=x_1\mathrm{e}^{x_1-1}-a(x_1+\ln x_1)=x_1\mathrm{e}^{x_1-1}(1-x_1-\ln x_1)\ge 0$，则 $1-x_1-\ln x_1\ge 0$，

因函数 $y=1-x-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，而当 $x=1$ 时，$y=0$，则由 $1-x_1-\ln x_1\ge 0$ 得 $0<x_1\le 1$，

令 $\varphi(x)=x-\ln x-1,0<x\le 1$，求导得 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}\le 0$，当 $\varphi(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，

$\forall x\in(0,1]$，$\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时取"=",即 $x\in(0,1]$，$x-1\ge\ln x$，

于是得 $x_1-1\ge\ln x_1$，$\mathrm{e}^{x_1-1}\ge x_1>0$，$1-x_1-\ln x_1\ge 2(1-x_1)\ge 0$，

因此，$x_1\mathrm{e}^{x_1-1}(1-x_1-\ln x_1)\ge x_1\cdot x_1\cdot 2(1-x_1)=2(x_1^2-x_1^3)$，

所以 $h(x_1)\ge 2(x_1^2-x_1^3)$.（12 分）

22 解：（1）因为曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{t^2}-1 \\ y=\sqrt{3}t-\dfrac{2\sqrt{3}}{t} \end{cases}$（$t>0$，$t$ 为参数），

所以由 $y=\sqrt{3}t-\dfrac{2\sqrt{3}}{t}$ 两边平方得：$y^2=12(\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{t^2}-1)=12x$，

而 $x=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{t^2}-1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{t^2}{4}\cdot\dfrac{1}{t^2}}-1=0$，当且仅当 $\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{1}{t^2}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以曲线 $C$ 的直角坐标方程 $y^2=12x$；（5 分）

（2）易知直线 $l$：$x-y-2=0$ 与 $x$ 轴的交点为 $F$（2，0），

直线的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \end{cases}$（$t'$ 为参数），

代入 $y^2=12x$ 得 $t'^2-12\sqrt{2}t'-48=0$，

设 $A$，$B$ 两点对应的参数分别为 $t'_1$，$t'_2$，

则 $t'_1\cdot t'_2=-48<0$，$t'_1+t'_2=12\sqrt{2}$（8 分）

$|FA|+|FB|=|t'_1-t'_2|=\sqrt{(t'_1+t'_2)^2-4t'_1t'_2}=4\sqrt{30}$（10 分）

**23**.（1）$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(a+b+c)^2=1$

$a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{3}$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时等号成立（5 分）

（2）由重要不等式得 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca, a^2+b^2+c^2\geq ac+ba+cb$

两式相加得 $2(a^2+b^2+c^2)\geq a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$

$\geq[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)$

$\geq(a+b+c)^2=1$.从而不等式得证。（10 分）

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。